Les grands thèmes en terminale

- Lois à densité: lois normales, loi uniforme
- Intervalles de fluctuation
- Intervalles de confiance

Les grands thèmes en ES/L

Statistiques probabilités

En 1ière ES-L Analyse de données (variance), Variable aléatoire discrète, loi binomiale

Intervalle de fluctuation et prise de décision (cadre binomial)

En TES-L

Conditionnement

Lois à densité : uniforme, exponentielle, normale

Intervalle de fluctuation, estimation et intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%

Les grands thèmes en S

Statistiques probabilités

En 1$^{\text{ière}}$ S

Analyse de données (variance)

Variable aléatoire discrète, loi binomiale

Intervalle de fluctuation et prise de décision (cadre binomial)

En TS

Conditionnement, indépendance

Lois à densité : uniforme, exponentielle, normale

Intervalle de fluctuation, estimation et intervalle de confiance

Les grands thèmes en STI2D

Statistiques probabilités

En 1ière

Analyse de données (variance)

Variable aléatoire discrète, loi binomiale

Intervalle de fluctuation et prise de décision (cadre binomial)

En Terminale

Lois à densité : uniforme, exponentielle, normale

Intervalle de fluctuation, estimation et intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%

LES PROBABILITES DANS LES SECTIONS DE TERMINALE

THEMES	S	ES L	STIDD STL
I) Conditionnement et indépendance			
1) Calcul de $P_A(B)$	x	x	
2) Indépendance	x		

LES PROBABILITES DANS LES SECTIONS DE TERMINALE

THEMES	S	ES L	STIDD STL
II) Notions de lois à densité à partir d'exemples.			
1) Exemples avec intégrale	x		
2) Loi uniforme sur [a ; b]			
a) Proba, espérance	x	x	x
b) Simulation, variance			x
c) Monte-Carlo (A.P.)	x		

LES PROBABILITES DANS LES SECTIONS DE TERMINALE

THEMES	S	ES L	STIDD STL
II) Notions de lois à densité à partir d'exemples.			
3) Loi exponentielle			
Proba, espérance	x		x

LES PROBABILITES DANS LES SECTIONS DE TERMINALE

THEMES	S	ES L	STIDD STL
II) Notions de lois à densité à partir d'exemples.			
4) Loi normale			
a) Loi centrée et réduite N(0 ; 1)	x	x	
b) Théorème de Moivre-Laplace	x		
c) Loi N(μ ; σ^2)	x	x	x
d) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale			x

LES PROBABILITES DANS LES SECTIONS DE TERMINALE

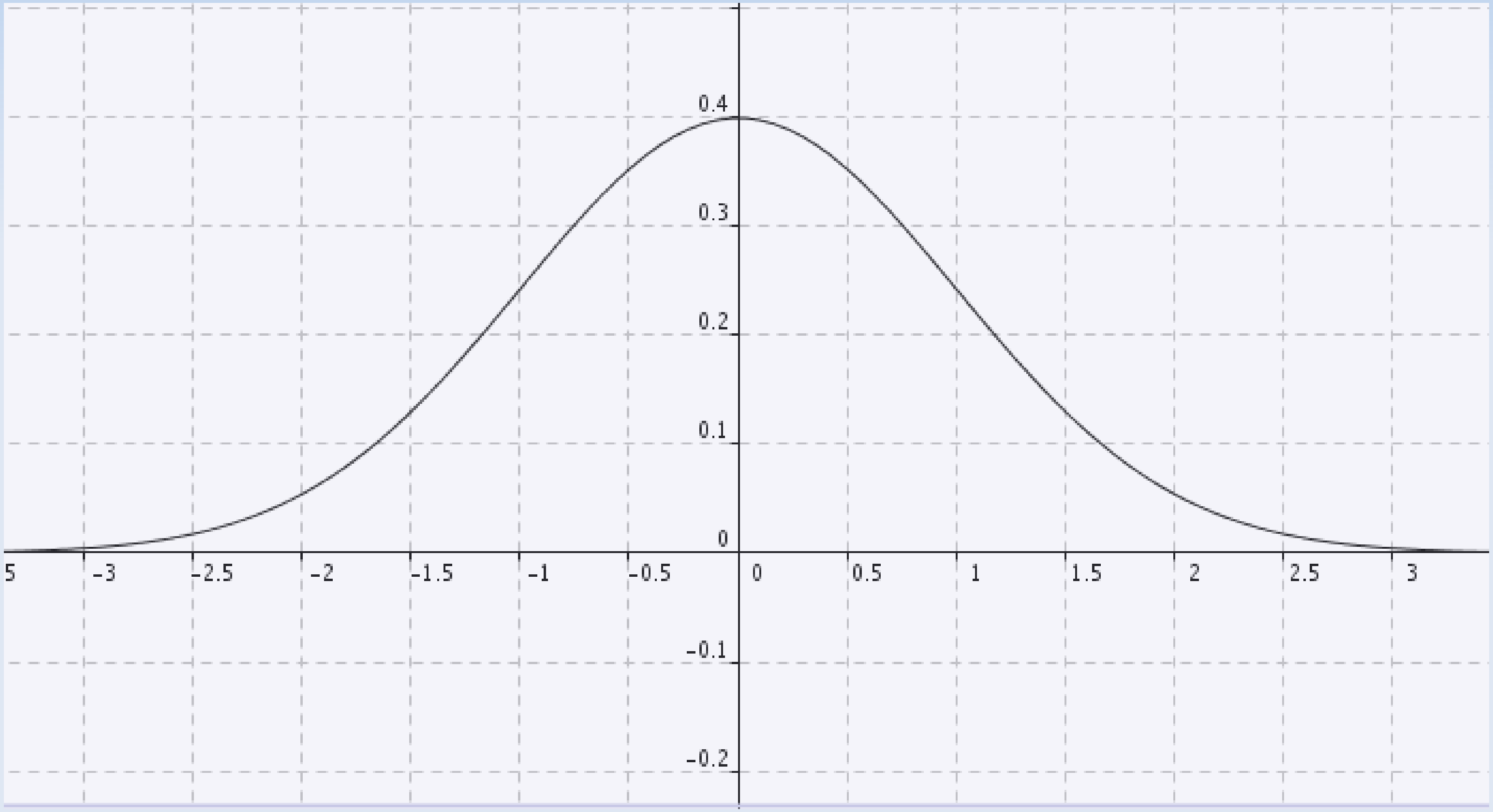
THEMES	S	ES L	STIDD STL
III) Estimation			
1) Intervalle de fluctuation asymptotique	x	x	x
2) Intervalle de confiance			
a) Estimer une proportion	x	x	x
b) Déterminer une taille d'échantillon	x	x	
c) Prendre une décision dans la comparaison de deux proportions	x		x

La loi normale centrée réduite

La variable aléatoire X suit la loi normale N(0;1) de paramètres 0 et 1 lorsque sa densité de probabilité est la fonction *f* définie sur R par:

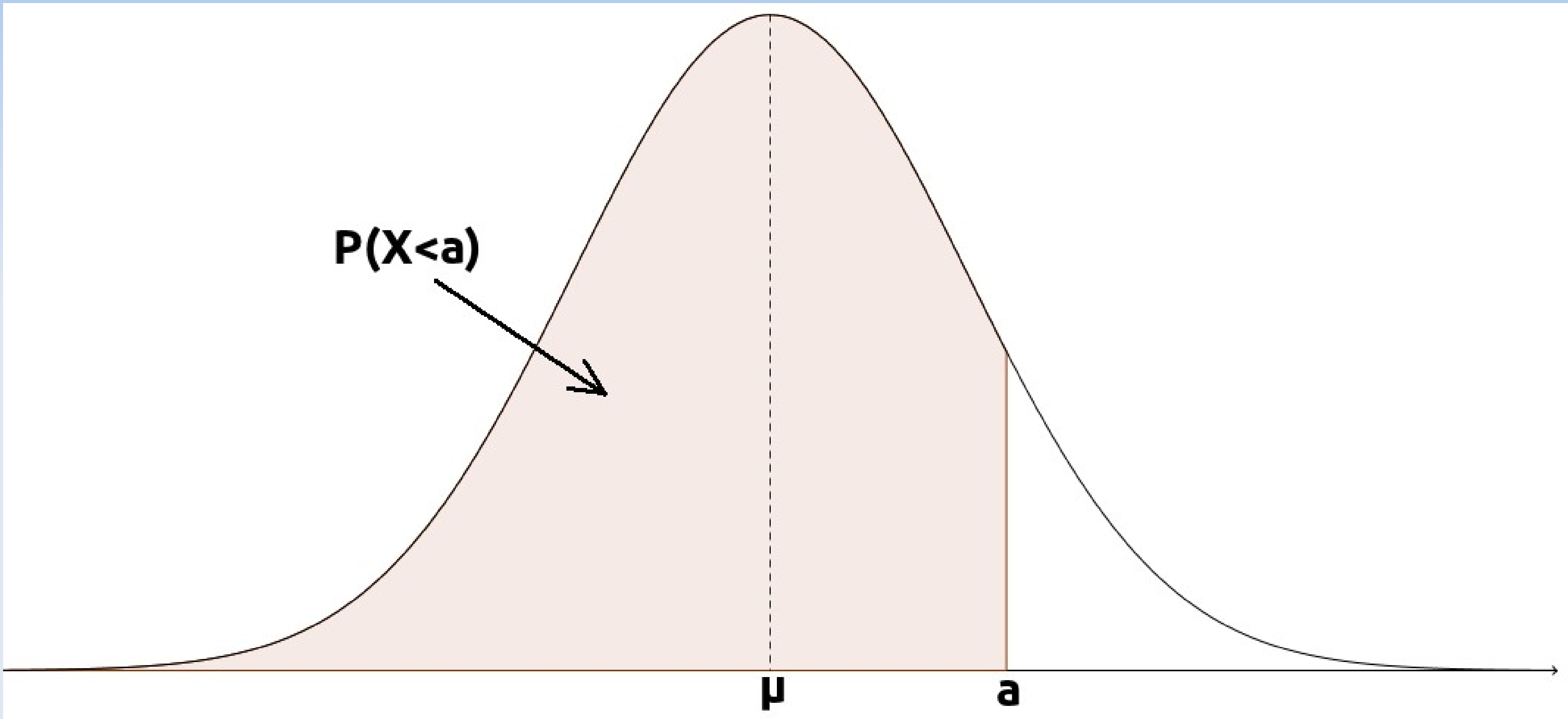
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\,pi)}} \times e^{\frac{-1}{2} t^2}$$

La loi normale centrée et réduite

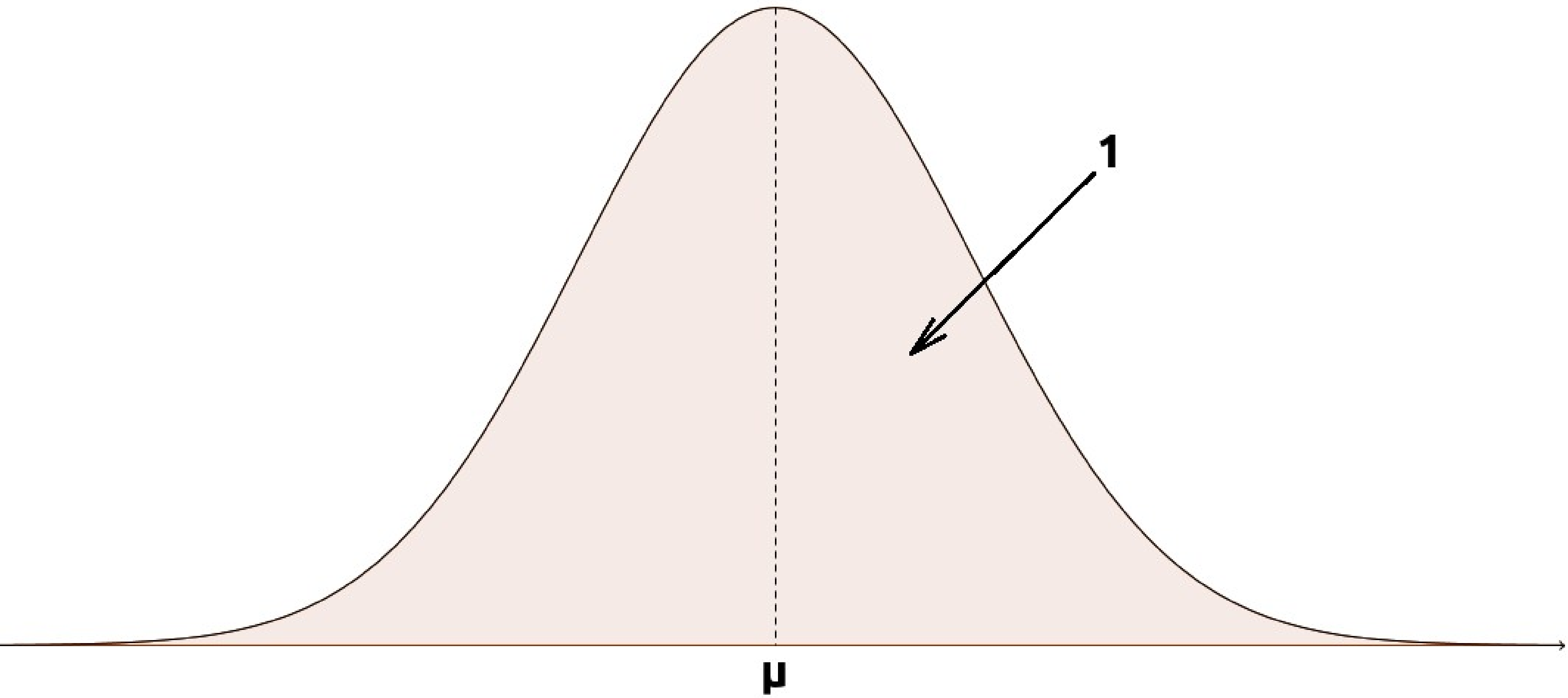


Quelques propriétés des lois normales

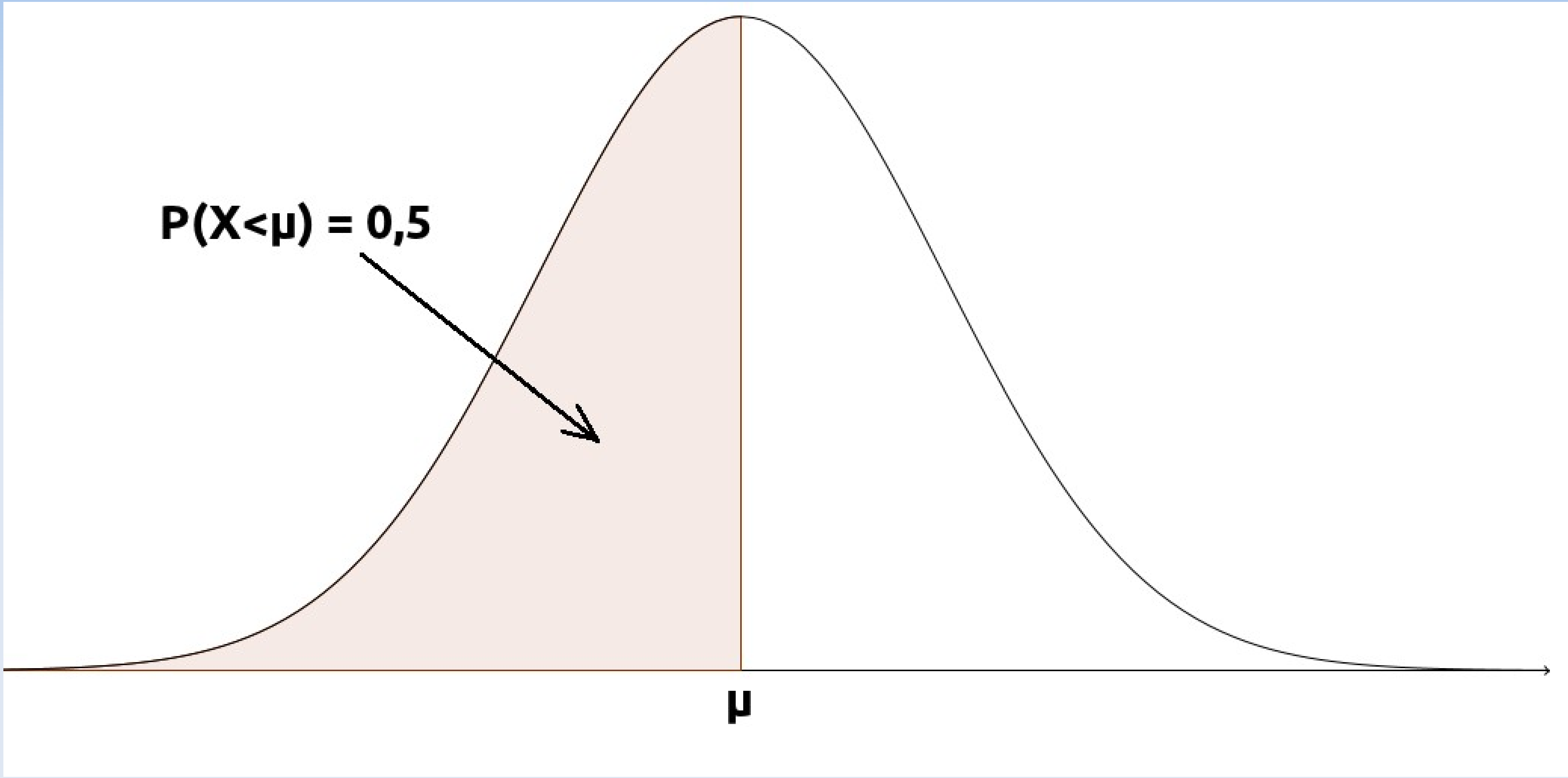
Les lois normales



Les lois normales



Les lois normales



Les lois normales

- Effets de μ et σ sur la densité d'une loi normale

- Centrage et réduction d'une loi normale de paramètres μ et σ

→ animation géogébra

Application

La production annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut-être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

2. Calculer la production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau

La calculatrice

1. On s'intéresse à P(X<5800)

Casio 35 et supérieur

Dans le menu RUN
Dans le menu RUN
> OPTN F6
> F6
> P (F1)

On doit centrer et réduire X.
On tape alors P((5800-6000)/400)
On obtient environ 0,30854

Dans le menu RUN
> SHIFT Sketch (F4) Mode dessin
> Y= (F1)
On tape Graph Y = P(-0,5)
Pour obtenir P(-0,5), on se reporte ci-dessus.

TI 83 et supérieur

On calcule 0,5 – P(5800 < X < 6000)

On saisit :

0.5 -
2nde → Distr (touche VARS)
2) Normalcdf(→ Enter
5800,6000,6000,400) → Enter

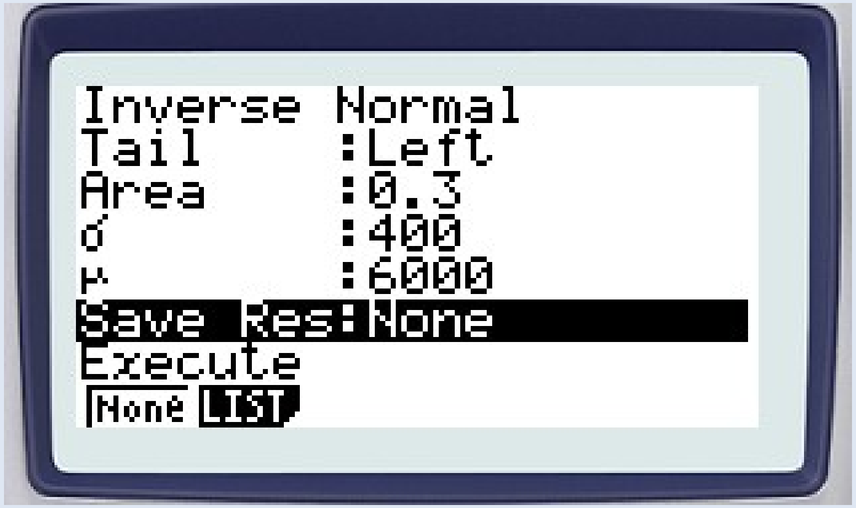
VALEUR RETOURNEE : 0.308 537 531 7

La calculatrice

2. On s'intéresse à P(X< v)=0,3 et on cherche v

Casio 35+ et supérieur

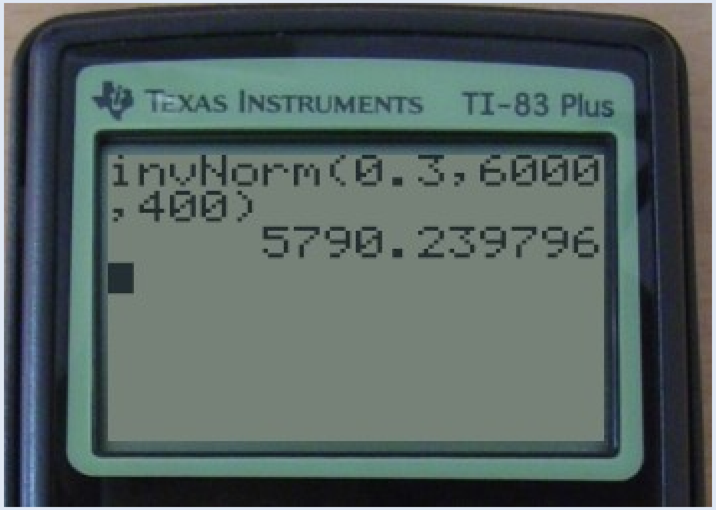
Dans le menu STAT
> DIST (F5)
> Norm (F1)
> InvN (F3)



TI 83 et supérieur

InvNorm(0.3,6000,400)

2nde → Distr
3) invNorm(+ enter
0.3,6000,400) + enter



La calculatrice donne environ 5790 litres

Théorème de Moivre-Laplace

- On suppose que pour tout entier n, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
- On pose $$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Alors pour tous réels a et b avec a<b on a:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) = P\left(a \leqslant Z \leqslant b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Conditions d'approximation

On pourra remplacer

$$P(a \leq Z_n \leq b)$$

par

$$P(a \leq Z \leq b)$$

sous les conditions

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$

→ *animation géogébra*

Centrage et réduction de X_n

Soit $X_n \to B(n\,;\,p)$

Donc les valeurs de X_n sont 0, 1, 2, …, n.

$E(X_n) = np$

$\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$ noté σ par la suite

Centrage et réduction de X_n

Soit $X_n \to B(n\,;\,p)$

On définit la variable $$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}$$

Les valeurs de Zn sont :

$(0 - np)/\sigma\ ;\ (1 - np)/\sigma\ ;\ \ldots\ ;\ (n - np)/\sigma$

- CES VALEURS SONT DISTANTES DE $1/\sigma$

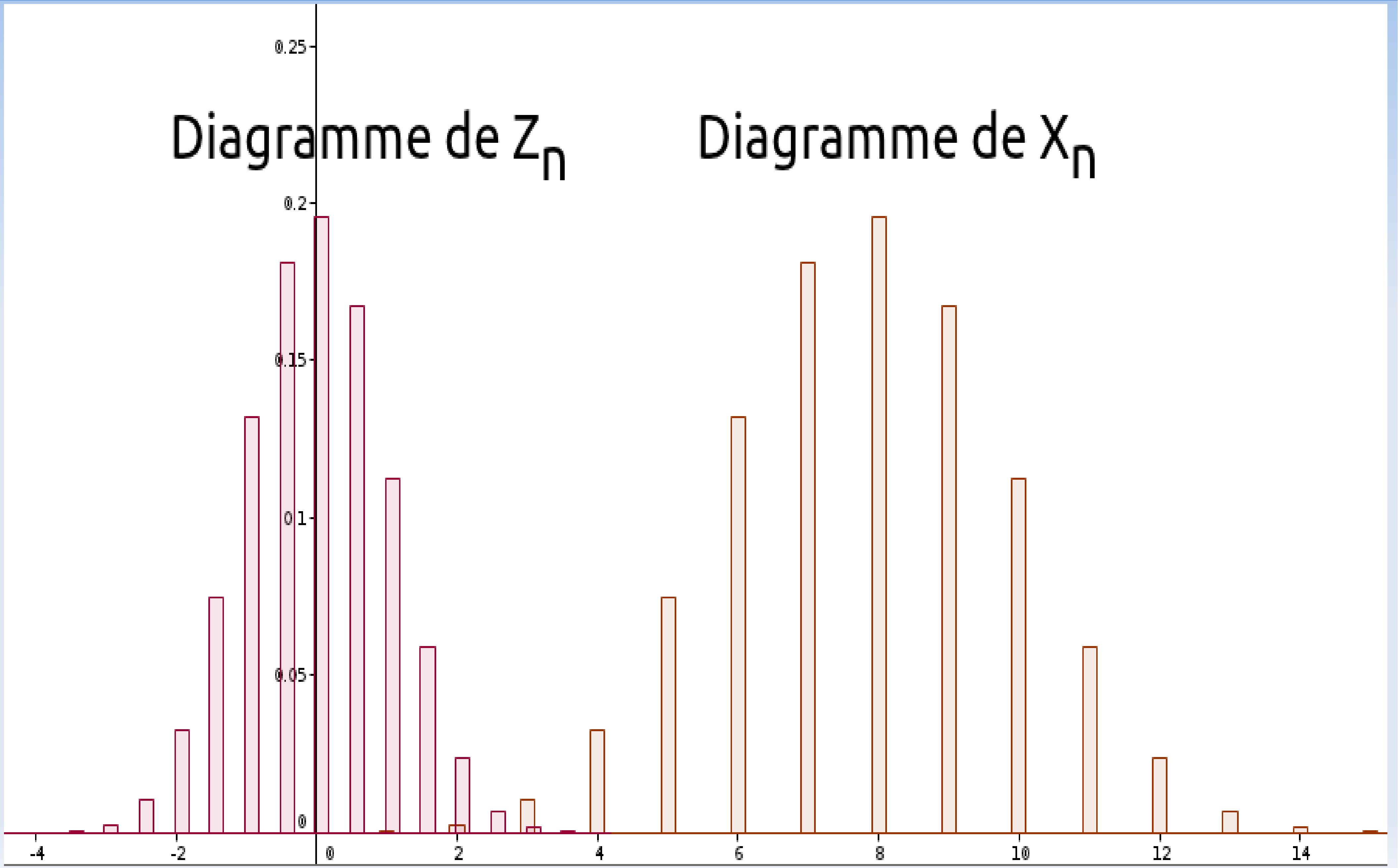
Centrage et réduction de X_n

Soit $X_n \to B(n\,;\,p)$; $Z_n \in \{(0 - np)/\sigma\,;\,\ldots\,(n - np)/\sigma\}$

$P(Z_n = (k - np)/\sigma) = P(X_n = k)$

- Les bâtons du diagramme de Z_n sont de même hauteur que ceux du diagramme de X_n
- En revanche, l'espacement entre les bâtons pour Z_n est $1/\sigma$ alors que pour X_n, les bâtons sont espacés de 1.

Les deux diagrammes



Transformation bâtons → barres

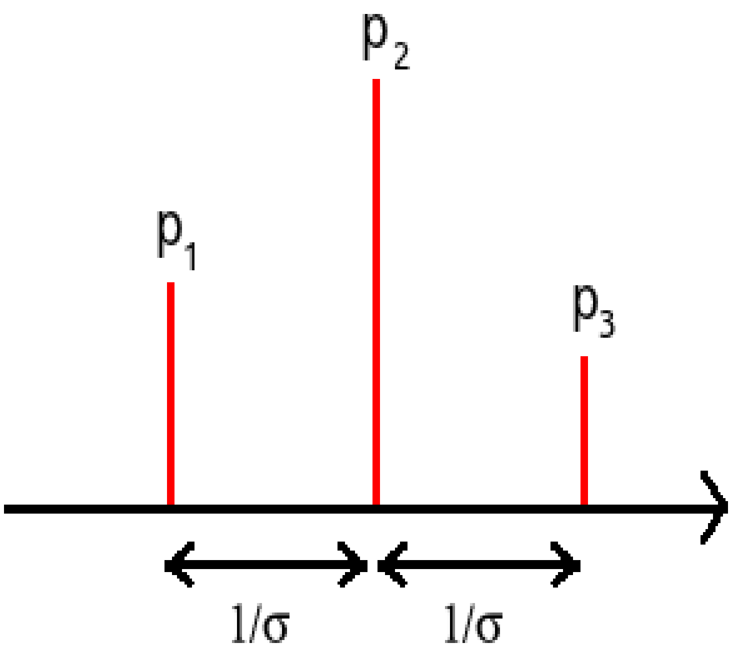
On veut maintenant transformer le diagramme en bâtons de Z_n en un diagramme en barres avec la contrainte suivante :

HAUTEUR DES BÂTONS = AIRE DES BARRES

Transformation bâtons → barres

Diagramme de Z_n

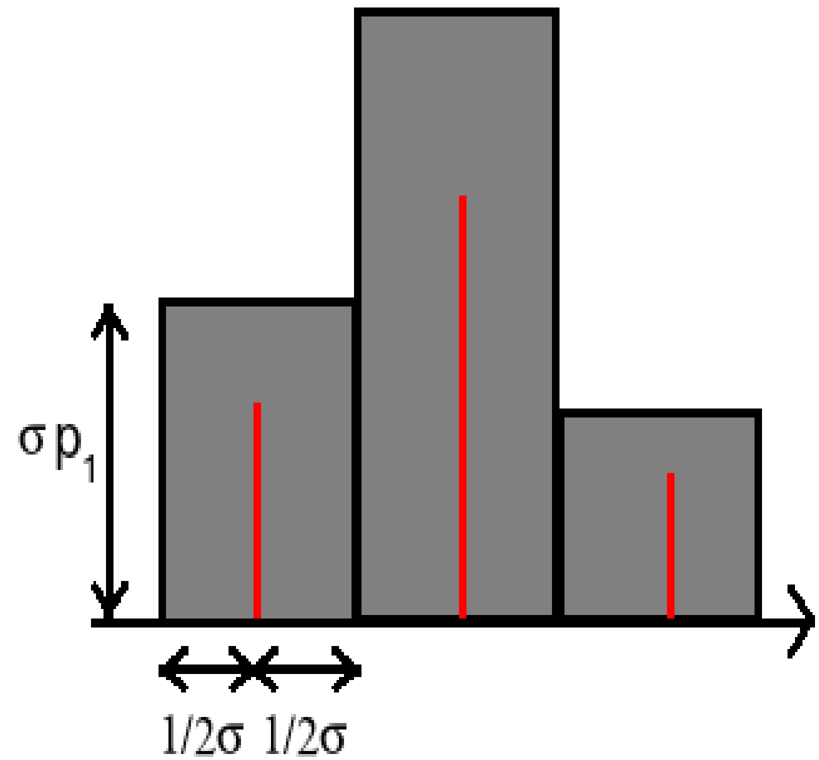
Exemple : $\sigma = 1,4$



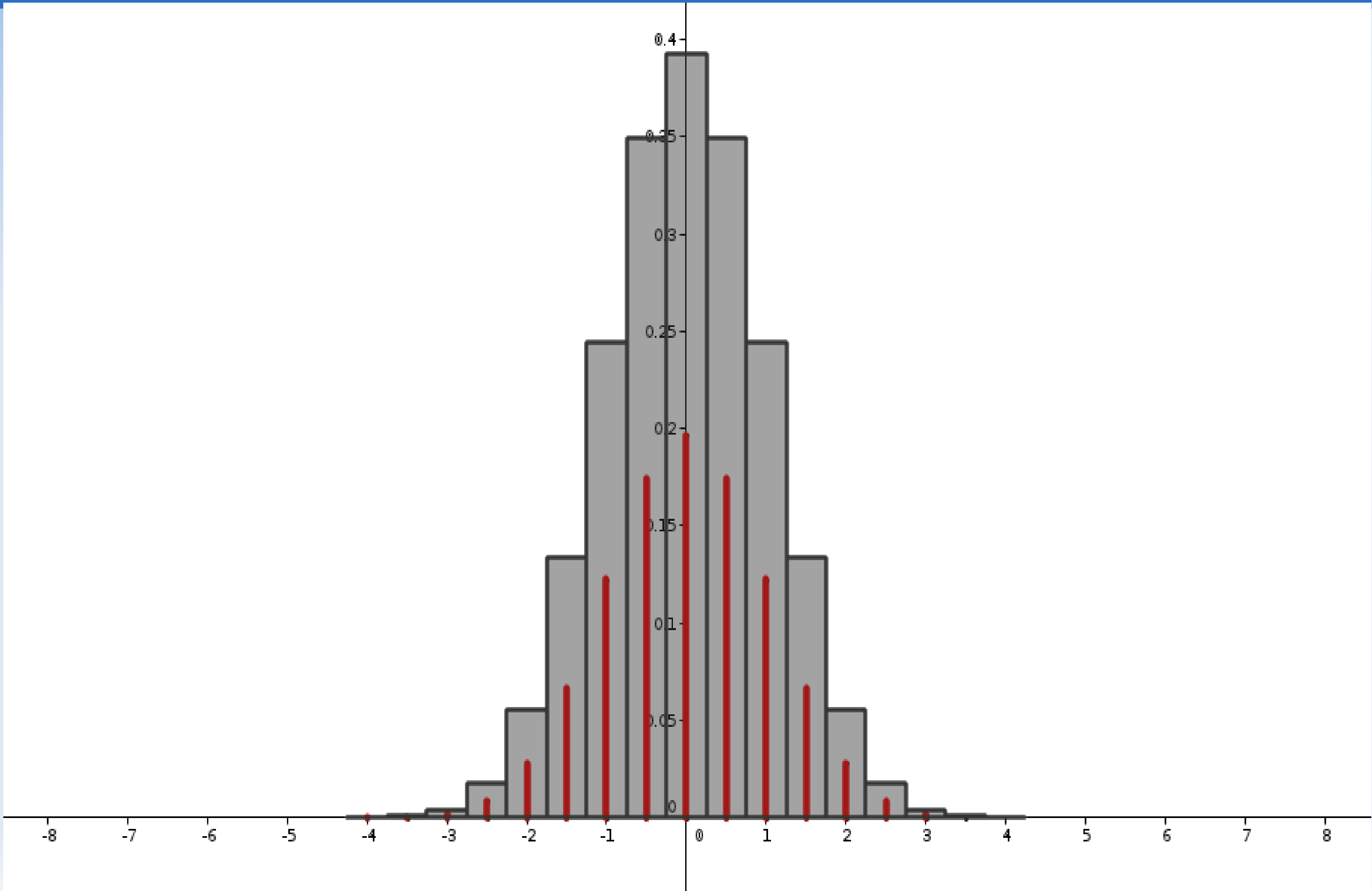
surface d'une barre

=

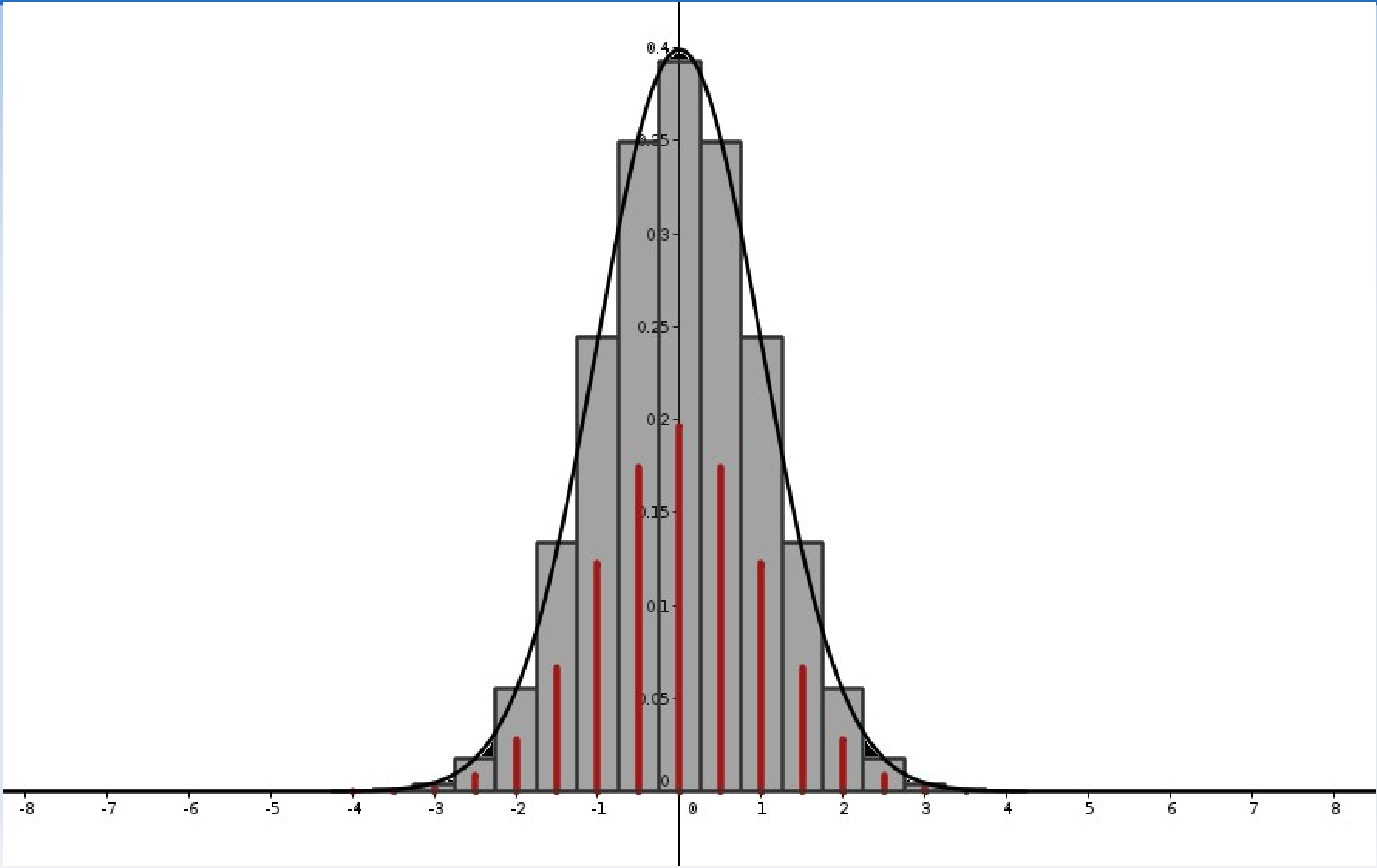
hauteur de bâton



Transformation bâtons → barres



bâtons → barres → Loi normale



Application

Une enquête permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, prélevée au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire, en France le lendemain est 0,7. On admet que l'entreprise expédie 100 lettres par jour et on note X la v.a.qui associe à un jour au hasard le nombre de lettres qui parviendront le lendemain à leur destinataire.

- Calculer la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres parviennent à leur destinataire le lendemain

Solution

X_{100} suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,7.

Soit $Z_{100} = \dfrac{X_{100} - 70}{\sqrt{21}}$

- On s'intéresse à $P(X_{100} \geq 80) = P(Z_{100} \geq 10/\sqrt{21})$

  $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$,

  $\Longrightarrow P(Z_{100} \geq 10/\sqrt{21}) \approx P(Z \geq 10/\sqrt{21})$
- La machine fournit : $P(Z \geq 10/\sqrt{21}) \approx 0{,}145\,48\ldots$

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **HYPOTHESES :**

  - p = proportion de présence d'un caractère donné dans une population
  - p = probabilité d'apparition d'un événement
  - On prélève un échantillon de taille n.
  - $X_n \rightsquigarrow B(n ; p)$

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **<u>HYPOTHESES :</u>**

  - $X_n \rightsquigarrow B(n ; p)$
  - On pose $\alpha \in]\, 0 ; 1 [$ (ex. $\alpha = 0,05$)
  - On cherche a et b tels que :

$$\color{red}{\mathbf{P(X_n \in [\,a ; b\,]) \geq 1 - \alpha}}$$ (ex. $P(X_n \in [\,a ; b\,]) \geq 0,95$)

$[a ; b]$ est appelé "<u>intervalle de fluctuation de X_n au seuil $1 - \alpha$</u>"

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **DETERMINATION DE L'I.F. :**

  - **EN SECONDE**

    I.F. de $F_n = X_n/n$: $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

  - **EN PREMIERE**
    - On calcule les probas cumulées de la loi B(n ; p).
    - On cherche :
      - a = + petit entier tel que $P(X_n \leq a) > 0{,}025$
      - b = + petit entier tel que $P(X_n \leq b) \geq 0{,}975$
    - [a; b] est un I.F. de X_n

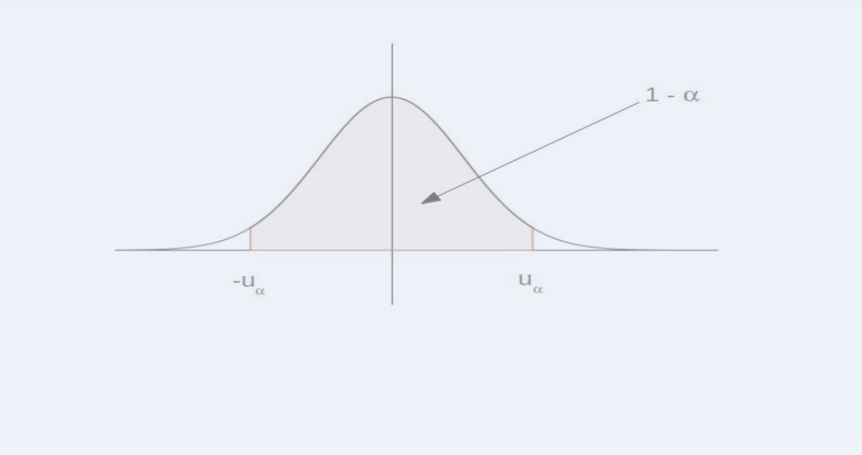
  - **EN TERMINALE**
    - On va utiliser le théorème de Laplace.

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **DETERMINATION DE L'I.F. :**

  - EN TERMINALE
    - On va calculer un I.F. ASYMPTOTIQUE
    - On détermine u_α, unique réel tel que

$$\mathbf{P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha} \quad \text{où } Z \longrightarrow \mathcal{N}(0\,;\,1)$$



$$\begin{cases} \alpha = 0{,}05 \Rightarrow u_\alpha = 1{,}96 \\ \alpha = 0{,}01 \Rightarrow u_\alpha = 2{,}58 \end{cases}$$

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **DETERMINATION DE L'I.F.**
  - RAPPELS

$$\begin{cases} X_n \rightsquigarrow B(n\,;p) \\ \alpha \in \ ]0;1[\\ u_\alpha \text{ précédemment défini} \end{cases}$$

TH DE LAPLACE : $\lim P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$

où $I_n = \left[\, p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,\right]$

I_n est un I.F. asymptotique de F_n au seuil $1 - \alpha$

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **CONDITIONS D'APPLICATION :**
  - RAPPELS

$$\left\{\begin{array}{l} X_n \rightsquigarrow B(n\,;\,p) \\ \alpha \in \;]0;1[\\ u_\alpha \text{ précédemment défini} \\ \lim P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Si } n \geq 30\ ;\ np \geq 5\ ;\ n(1 - p) \geq 5}$

Alors, on peut approcher $P(F_n \in I_n)$ par $1 - \alpha$

INTERVALLES DE FLUCTUATION

- **CHAMPS D'APPLICATION :**

  - p = proportion CONNUE de présence d'un caractère donné dans une population

    Dans une sous-population, on cherche à savoir si la proportion d'apparition du caractère est identique.

  - Représentativité d'un échantillon.

  - Détermination de la taille d'échantillon nécessaire à la réalisation d'une contrainte.

Un exercice très classique..

Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne contenant **3 boules blanches et 7 boules noires.** Si la boule tirée est blanche, alors la partie est gagnée, sinon elle est perdue. Sur **50** personnes ayant participé à ce jeu, seulement **8** ont gagné ; peut-on soupçonner l'organisateur de tricher ?

Programme de seconde :

- On fait l'hypothèse qu'il n'a pas triché.
- On assimile les 50 tirages à un échantillon de taille $n = 50$ extrait d'une population dont la proportion des parties gagnantes est $p = 0,3$.
- Les conditions $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ sont vérifiées.
-
-

Programme de seconde :

- Intervalle de fluctuation :
-
-
-

$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0{,}159\ ;\ 0{,}441]$$

proportion observée : $\frac{8}{50} = 0{,}16$

- Conclusion : on ne peut pas rejeter l'hypothèse au seuil de risque de 5%.

Programme de 1ère

- On fait l'hypothèse qu'il n'a pas triché
- On considère la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées dans un échantillon de 50 tirages.
- X suit la loi binomiale de paramètres

  $n = 50$ et $p = 0,3$
- On considère les entiers a et b tels que :

→ a est le plus petit entier tel que $p(X \leq a) \geq 0,025$

→ b est le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$

Programme de 1ère

On obtient a = 9 et b = 22.
L'intervalle de fluctuation est donc :

[0,18 ; 0,44]

$$\frac{8}{50} = 0,16 \qquad \frac{9}{50} = 0,18 \qquad \frac{22}{50} = 0,44$$

Conclusion : on rejette l'hypothèse au seuil de risque de 5%.

k	p(X≤k)
0	1,7985E-08
1	4,0337E-07
2	4,4499E-06
3	3,2198E-05
4	0,00017193
5	0,00072286
6	0,00249372
7	0,0072642
8	0,01825335
9	**0,04023163**
10	0,07885062
11	0,13903606
	⋮
20	0,95223616
21	0,97491296
22	**0,98772387**
23	0,99440783
24	0,99763045
25	0,99906682
	⋮

Programme de terminale :

- On fait l’hypothèse qu’il n’a pas triché
- Les conditions n ≥ 30 ; np ≥ 5 ; n(1-p) ≥ 5
  sont vérifiées.
- On détermine l’intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :
-
- $$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right];\ \left[0,173\ ;\ 0,427\right]$$
-
-
- $$\frac{8}{50}=0,16$$
- Conclusion : on rejette l’hypothèse au seuil de risque de 5%.
-

INTERVALLES DE CONFIANCE

- **HYPOTHESES :**

  - p = proportion de présence d'un caractère donné dans une population
  - p = probabilité d'apparition d'un événement

  - p est supposée **INCONNUE**

  - On prélève un échantillon de taille n.
    $X_n \rightsquigarrow B(n ; p)$

INTERVALLES DE CONFIANCE

- **DEFINITION D'UN I.C.** :

  - I est un I.C. de p au seuil (1 - α) si :

$$P(I \quad \text{contienne} \quad p) \geq 1 - \alpha$$

aléatoire

Au seuil 0,95 : $I = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

INTERVALLES DE CONFIANCE

- **CHAMPS D'APPLICATION :**

  rappel : p = proportion **INCONNUE** de présence d'un caractère donné dans une population

  ➔ Estimer p à l'aide d'un intervalle.

  ➔ Détermination de la taille d'échantillon minimum pour que l'I.C. de p soit d'amplitude inférieure à un réel positif donné.

→ animation tableur