EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 Le physicien SWEDEBORG a analysé un lot complet de 518 prélèvements d'eau. Il a compté le nombre de particules d'or en suspension dans chacun des prélèvement de volume constant 100 ml et a obtenu le tableau suivant :

Nombre de partic.: x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de prélèv. : n_i	112	168	130	69	32	5	1	1

1°) Pour un prélèvement choisi au hasard parmi les 518 prélèvements analysés, on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de particules d'or observées. Calculer les probabilités prob(X = k) pour les valeurs de k appartenant à {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Calculer E(X) et V(X).

2°) On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est la loi de Poisson de paramètre 1,55.

a) Calculer les probabilités prob(Y = k) pour les valeurs de k appartenant à {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

b) Pour une série de 518 observations d'un phénomène suivant la loi de Poisson de paramètre 1,55, calculer les effectifs correspondant aux valeurs entières de 0 à 7 de la variable observée. (chaque effectif calculé est égal au produit de l'effectif total par la probabilité correspondante).

Proposition de corrigé : 1) Le choix du prélèvement étant fait au hasard, chacun des prélèvement a la même probabilité d'être choisi on déduit donc le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
prob(X=x_i)= n_i/n	$\frac{112}{518}$	$\frac{168}{518}$	$\frac{130}{518}$	$\frac{69}{518}$	$\frac{32}{518}$	$\frac{5}{518}$	$\frac{1}{518}$	$\frac{168}{518}$

E(X) = $\sum_{i=0}^{7} x_i \text{ prob}(X = x_i) = \frac{1}{518}\sum_{i=0}^{7} x_i \, n_i$, qui correspond à la moyenne du lot observé.

On obtient : E(X) = $\frac{801}{518}$ soit approximativement **E(X) » 1,55** particule.

De même V(X) = E(X²) - [E(X)]² = $\sum_{i=0}^{7} x_i^2 \text{ prob}(X = x_i)$ - [E(X)]²

$$= \frac{1}{518}\sum_{i=0}^{7} x_i^2 \, n_i - [E(X)]^2.$$

On obtient : V(X) = $\frac{2031}{518} - \left(\frac{801}{518}\right)^2$ soit approximativement **V(X) » 1,5297**.

2) A l'aide d'une calculatrice, en utilisant la formule $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ avec λ = 1,55, on trouve les résultats suivants (arrondis au millième) :

a)

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7

prob(Y = y_i)	0,212	0,329	0,255	0,132	0,051	0,016	0,004	0,001

b) On obtient, en calculant les effectifs corresponddants :

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7
prob(Y = y_i)	0,212	0,329	0,255	0,132	0,051	0,016	0,004	0,001
effectifs calculés	109,8	170,4	132,1	68,4	26,4	8,3	2,1	0,5
effectifs observ.	112	168	130	69	32	5	1	1

Remarques : * on constate que les effectifs calculés sont proches des effectifs observés.
* cet exercice a pour but de sensibiliser les élèves à la notion de modèle mathématique.

EXERCICE 2

On admet que la probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans le train est 0,005. Un train transporte 850 voyageurs. On admettra que ces voyageurs se sont regroupés au hasard et que leurs comportement, par rapport à leurs bagages, sont indépendants les uns des autres.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

1°) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.

2°) Donner, en justifiant la réponse, une loi de probabilité permettant d'approcher la loi trouvée à la question précédente. En utilisant cette loi approchée, calculer une valeur approchée de la probabilité des événements suivants :

a) aucun voyageur n'a oublié ses bagages,

b) cinq voyageurs au moins ont oublié leurs bagages.

Proposition de corrigé : 1) Pour chaque voyageur il y a deux possibilités :

- il oublie ses bagages dans le train, avec la probabilité 0,005, ou bien
- il n'oublie pas ses bagages dans le train, avec la probabilité 0,995.

Les comportements de chacun des 850 voyageurs du train sont indépendants les uns des autres.
La loi de la variable aléatoire X est donc une loi binomiale, c'est **la loi binomiale de paramètres n = 850 et p = 0,005**.

On a, pour tout entier k de 0 à 850 : prob(X = k) = $C_{850}^{k}\ 0{,}005^{k}\ 0{,}995^{850-k}$.

On trouve : E(X) = np = 850 x 0,005 donc **E(X) = 4,25** voyageurs ayant oublié leurs bagages.

V(X) = np(1-p) = 850 x 0,005 x 0,995 soit **V(X) $\approx$ 4,2298.**

2) On est en présence d'une loi binomiale pour laquelle n est grand, p est inférieur à 0,1 et np est inférieur à 5, on remarque que l'espérance et la variance sont voisines ; on peut donc approcher cette loi par une loi de Poisson. On prendra **la loi de Poisson de paramètre λ = 4,25**.

a) On cherche prob(X = 0),

$$\text{prob}(X = 0) \approx e^{-4,25} \times \frac{4{,}25^{0}}{0!} \approx 0{,}014$$

la probabilité pour qu'aucun voyageur n'ait été oublié ses bagages dans le train est approximativement 0,014.

b) prob(X ≥ 5) = 1 - prob(X ≤ 4).

$$\approx 1 - \left(\sum_{i=0}^{4} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = 1 - e^{-4,25}\left(1 + \frac{4,25}{1} + \frac{4,25^2}{2} + \frac{4,25^3}{6} + \frac{4,25^4}{24}\right)$$

prob(X ≥ 5) ≈ 1 - 0,580 = 0,420

La probabilité pour qu'au moins cinq voyageurs aient oublié leurs bagages dans le train est approximativement 0,420.

EXERCICE 3 Dans un certain vignoble, on admet que la probabilité pour qu'un pied de vigne soit atteint d'une maladie donnée est 0,400. On observe 600 pieds de vigne choisis au hasard dans ce vignoble ; on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pieds observés atteints par la maladie.

1°) Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

2°) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de probabilité de X ? En utilisant cette approximation, calculer des valeurs approchées des probabilités suivantes :

* prob(240 < X < 252) ; * prob(232 < X) ;
* prob(X < 264).

Proposition de corrigé : 1) Pour chaque pied de vigne observé, il n'y a que deux possibilités : * il est malade, avec la probabilité p = 0,400, ou bien
* il est sain, avec la probabilité 1-p = 0,600.

On admet qu'il y a indépendance des tirages, la probabilité d'être atteint par la maladie restant constamment égale à 0,400. La loi de probabilité de X est donc la loi Binomiale de paramètres n=600 et p=0,400 soit prob(X=k) = $C_{600}^{k}\ 0,400^{k} \times 0,600^{600-k}$ pour toute valeur entière de k comprise entre 0 et 600.

E(X) = np = 600 x 0,400, soit **E(X) = 240 pieds malades**.

V(X) = np(1-p) = 600 x 0,400 x 0,600 soit **V(X) = 144**.

2) n est grand, p est peu différent de 0,5 ; np (240) et n(1-p) (360) sont tous deux supérieurs à 5, on peut donc approcher la loi binomiale trouvée en 1°) par une loi Normale. On prend la loi Normale de paramètres μ = 240 et σ = 12.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}$(240 ; 12).

* prob(240 < X < 252) : utilisant une approximation d'une loi Binomiale, discrète, par une loi Normale, continue, on procède à une correction de continuité. On a donc :

prob(240 < X < 252) ≈ prob(240,5 ≤ Y ≤ 251,5) en passant à la variable Normale centrée réduite, on a : $\text{prob}\left(\frac{240,5-240}{12} \le U \le \frac{251,5-240}{12}\right)$

prob(240 < X < 252) ≈ prob(0,04 ≤ U ≤ 0,96)
prob(U ≤ 0,96) - prob(U ≤ 0,04)
Φ(0,96) - Φ(0,04)
0,8316 - 0,5163
0,3153 on a donc : **prob(240 < X < 252) » 0,315**

* prob(232 < X) : en raisonnant comme pour le calcul précédent on a :

prob(232 < X) ≈ prob(232,5 ≤ Y) correction de continuité
prob(- 0,63 ≤ U) = 1 - prob(U ≤- 0,63)
1 - (1 - prob(U ≤ 0,63))
Φ(0,63) on trouve donc : **prob(232 < X) » 0,736.**

* prob(X < 264) :

$\text{prob}(X < 264) \approx \text{prob}(U \leq 1{,}96)$ **prob(X < 264) » 0,975.**