

## Intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence et loi binomiale

Ce texte précise le contenu « *Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence* » et la capacité correspondante, « *Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion* », des programmes du lycée.

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un certain caractère est  $p$ . Pour juger de cette hypothèse, on y prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille  $n$  sur lequel on observe une fréquence  $f$  du caractère.

On rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion dans la population est  $p$  lorsque la fréquence  $f$  observée est trop éloignée de  $p$ , dans un sens ou dans l'autre. On choisit de fixer le seuil de décision de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5 %.

Hypothèse :  
proportion  $p$

Taille  $n$   
Observation :  
fréquence  $f$

Lorsque la proportion dans la population vaut  $p$ , la variable aléatoire  $X$  correspondant au nombre de fois où le caractère est observé dans un échantillon aléatoire de taille  $n$ , suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On cherche à partager l'intervalle  $[0, n]$ , où  $X$  prend ses valeurs, en trois intervalles  $[0, a - 1]$ ,  $[a, b]$  et  $[b + 1, n]$  de sorte que  $X$  prenne ses valeurs dans chacun des intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,025, sans dépasser cette valeur.

En tabulant les probabilités cumulées  $P(X \leq k)$ , pour  $k$  allant de 0 à  $n$ , il suffit de déterminer le plus petit entier  $a$  tel que  $P(X \leq a) > 0,025$  et le plus petit entier  $b$  tel que  $P(X \leq b) \geq 0,975$ .

La règle de décision est la suivante : si la fréquence observée  $f$  appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 %  $\left[ \frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$ , on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est  $p$

dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut  $p$ .

**Définition :** l'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille  $n$ , d'une variable aléatoire  $X$  de loi binomiale, est

l'intervalle  $\left[ \frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$  défini par :

- $a$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq a) > 0,025$  ;
- $b$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq b) \geq 0,975$ .

Pour  $n \geq 30$ ,  $n \times p \geq 5$  et  $n \times (1 - p) \geq 5$ , on observe que l'intervalle de fluctuation  $\left[ \frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$  est

sensiblement le même que l'intervalle  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  proposé dans le programme de seconde.

### Exemple d'exercice

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 5 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est  $p = 0,52$ . Montrer que la variable aléatoire  $X$ , correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,52$ .

2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées  $P(X \leq k)$  où  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,52$ .

$k$	$P(X \leq k) \approx$
40	0,0106
41	0,0177
42	0,0286
43	0,0444
...	...
61	0,9719
62	0,9827
63	0,9897
64	0,9941

a. Déterminer  $a$  et  $b$  tels que :

- $a$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq a) > 0,025$  ;
- $b$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq b) \geq 0,975$ .

b. Comparer l'intervalle de fluctuation à 95 %,  $\left[ \frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$ , ainsi obtenu grâce à la loi binomiale,

avec l'intervalle  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ .

3. Énoncer la règle décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse  $p = 0,52$ , selon la valeur de la fréquence  $f$  des électeurs favorables à Monsieur Z obtenue sur l'échantillon.

4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 5 %, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

### Éléments de réponse

2. a. On lit  $a = 42$  et  $b = 62$ .

b. Les intervalles sont identiques.

3. Si  $f$  appartient à l'intervalle  $[0,42 ; 0,62]$ , l'hypothèse  $p = 0,52$  est acceptable, sinon, l'hypothèse  $p = 0,52$  est rejetée, au seuil de 5 %.

4. On considère que l'affirmation de Monsieur Z est exacte.

Remarque : la recherche de l'intervalle de fluctuation peut-être illustrée par le diagramme en bâton de la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,52$ .

