ESPRIT GENERAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme
Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies.

Evaluation
Exercices de valeur sensiblement égale.

EPREUVE 2009

Durée : 4 heures

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

Exercice 1

1.1. Système linéaire de deux suites récurrentes.

On note A, P, D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit les suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 0, y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -4x_n \end{cases} \end{cases}$$

et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Vérifier que l'on a :

$$D = P^{-1}AP.$$

2. Donner, sans démonstration, l'expression de D^n pour n entier naturel .
3. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que pour tout entier naturel n :
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
4. Vérifier que pour tout entier naturel n :
$$U_{n+1} = AU_n.$$
5. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$U_n = A^nU_0.$$
En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

1.2. Puissance d'une matrice.

Soient B et I_3 les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $B^2 = 5B - 4I_3$.
2. Pour n entier naturel on définit la propriété $\mathcal{H}_n$ par :
$$\mathcal{H}_n \text{ : Il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que : } B^n = a_nB + b_nI_3.$$
   a. Montrer que les propriétés $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont vraies et déterminer les couples (a_0, b_0), (a_1, b_1) et (a_2, b_2) correspondants.
   b. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n fixé non nul, montrer que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   c. Utiliser la première partie de l'exercice pour exprimer a_n, b_n en fonction de n.
   d. Conclure en donnant l'écriture matricielle de B^n.

Exercice 2

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal et on rappelle que $e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2.1. Allure de $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.
2. Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0,1[\,,]1,+\infty[$.
3. Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
4. On note B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

   a. Calculer l'ordonnée de B.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation : $y = 2\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1$, passe par les points A et B.
5. On admet que la fonction f est convexe sur $[0,1[$ et concave sur $]1,+\infty[$. Que peut-on en déduire sur les positions relatives de $\mathcal{C}_f$, de (D), et de (T) sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$?
6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ en traçant sur le même schéma les droites (D) et (T).(On donne $f(\frac{1}{2}) \simeq 1,2$ et on prendra 3 cm pour unité).

2.2. Encadrement de la valeur d'une intégrale.

On se propose dans cette partie de déterminer des encadrements de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

On ne cherchera jamais à calculer cette intégrale.

1. Interpréter l'intégrale I en terme d'aire d'un domaine que l'on hachurera sur le schéma de la question 2.1.6.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \qquad 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}.$$
   En déduire l'encadrement suivant :
$$\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}.$$
3. Prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$:
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$
   En déduire que :
$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx.$$

4. Effectuer une intégration par parties, pour calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx.$$

5. En utilisant la question 2.2.2., montrer que :

$$\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \leqslant \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

En déduire un nouvel encadrement de I.

6. En utilisant la considération géométrique de la question 2.1.5, justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left[2(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1)x + 1\right] dx.$$

En déduire un dernier encadrement de I.

Exercice 3

Une municipalité a lancé une étude statistique concernant les problèmes rencontrés par les usagers des transports en commun.

3.1. Partie 1.

L'enquête révèle que la probabilité qu'un usager attende moins de 7 minutes à une station donnée est égale à p, p appartenant à $]0,1[$.

1. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.
   a. On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
   Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance en fonction de p.
   b. On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
   Déterminer, en fonction de p, la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.

2. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
   -Le premier jour, il prend le bus.
   -Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
   -Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement $B_n =$ "Monsieur Thurman prend le bus le jour n".

a. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(B_n, \overline{B_n})$ pour montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = (p - \frac{1}{2})p_n + \frac{1}{2}.$$

b. Soit α le réel vérifiant :

$$\alpha = (p - \frac{1}{2})\alpha + \frac{1}{2}.$$

Montrer que la suite $(p_n - \alpha)$ est géométrique, et en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = (p - \frac{1}{2})^{n-1}(1 - \alpha) + \alpha.$$

c. La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

3. L'étude effectuée a permis de montrer que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut se représenter par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 4)$.

a. Exprimer la probabilité q que le retard soit inférieur à 7 minutes en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

b. A l'aide de la table donner une valeur approchée de q.

3.2. Partie 2.

Le temps passé chaque jour dans les transports en commun, par Monsieur Thierex, exprimé en heures, est une variable aléatoire réelle T dont une densité g est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 \text{ si } t < 0. \\ g(t) = t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ g(t) = 2 - t \text{ si } 1 < t < 2 \\ g(t) = 0 \text{ si } t \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Représenter la fonction g puis montrer que g est bien une densité de probabilité.

2. Calculer les probabilités suivantes :

$$P[T \leqslant 1], \quad P[T \leqslant 1,5].$$

3. Déterminer la valeur de l'espérance de T. Que représente cette valeur ?

CORRIGE

Exercice 1

1.1

1. Pour étudier l'inversibilité de P on étudie le système : $\begin{cases} x+y=a \\ -x-4y=b \end{cases}$ on trouve : $\begin{cases} x=\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b \\ y=-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b \end{cases}$ don c P est inversible et

$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

La vérification se fait simplement, on obtient bien : $\boxed{P^{-1} A P = D}$

2. D étant une matrice diagonale alors : $\forall\ n \in$, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. A partir de $P^{-1} A P = D$ en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} et en utilisant le fait que $P^{-1}P = I$ on obtient :
$A = PD P^{-1}$.
Soit R(n) : $A^n = PD^nP^{-1}$.
Pour n = 0 , $A^0 = I$ et $PD^0 P^{-1} = PP^{-1} = I$ donc R(0) est vraie.
Supposons R(n) vraie pour un entier n fixé, $n \geq 0$ alors $A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1} PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc R(n+1) est vraie ce qui prouve que : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ : A^n = PD^n P^{-1}}$. (Principe de récurrence).

En, effectuant le calcul matriciel on obtient : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^{n+1}-1 & 4^n-1 \\ 4-4^{n+1} & 4-4^n \end{pmatrix}}$

4. $AU_n = \begin{pmatrix} 5x_n + y_n \\ -4x_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$ donc on a bien : $\boxed{U_{n+1} = AU_n}$.

5. Q(n) : $U_n = A^n U_0$,
$A^0 U_0 = IU_0 = U_0$ donc Q(0) est vraie.
Supposons Q(n) vraie pour un entier n fixé alors : $U_{n+1} = AU_n = A(A^n U_0) = A^{n+1} U_0$ donc Q(n+1) est vraie.
Ce qui prouve que : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N} :\ U_n = A^n U_0}$.

En utilisant l'expression de A^n on obtient : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_n = \frac{1}{3}(4^n-1) \\ y_n = \frac{1}{3}(4-4^n) \end{cases}}$.

1.2.

1.$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, et $5B - 4I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ donc : $\boxed{B^2 = 5B - 4I_3}$.

2.a. $B^0 = I = 0.B + 1.I$ donc H_0 est vraie avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
$B^1 = B = 1.B + 0.I$ donc H_1 est vraie avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
$B^2 = 5B - 4I$ donc H_2 est vraie avec $a_2 = 5$ et $b_2 = -4$.
b. $B^{n+1} = B \times B^n = B \times (a_n B + b_n I)$ (H_n est vraie)
$= a_n B^2 + b_n B = a_n (5B - 4I) + b_n I = (5a_n + b_n) B - 4a_n I$

Donc H_{n+1} est vraie et : $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$ de plus : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$

c. Les suites (a_n) et (b_n) vérifiant les mêmes relations que le suites (x_n) et (y_n) avec les premiers termes identiques, donc :

En utilisant la question 1.1.5 on en déduit que : $\boxed{\forall\ n \in \mathrm{N}\ ,\ \begin{cases} a_n = x_n = \dfrac{1}{3}(4^n - 1) \\ b_n = y_n = \dfrac{1}{3}(4 - 4^n) \end{cases}}$.

d. $\forall\ n \in \square$, $B^n = a_n B + b_n I$ ce qui donne : $\boxed{\forall\ n \in \mathrm{N}\ ,\ B^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}}$.

Exercice 2

2.1. 1. Il est simple de vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -\infty$.

2. $\forall\ x \neq 1$, $f\,'(x) = \dfrac{xe^{-x}}{(1+x)^2}$ donc $\forall\ x \in [0\ 1,[$ $f\,'(x) \geq 0$ donc $\boxed{\text{f est croissante sur } [0,\ 1[}$,

de même $\boxed{\text{f est croissante sur }]1, +\infty[}$.

3. Equation de la tangente en $A(0, f(0)) : y - f(0) = f\,'(0)\,(x - 0)$, $f(0)\ \ 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\boxed{(T) : y = 1}$.

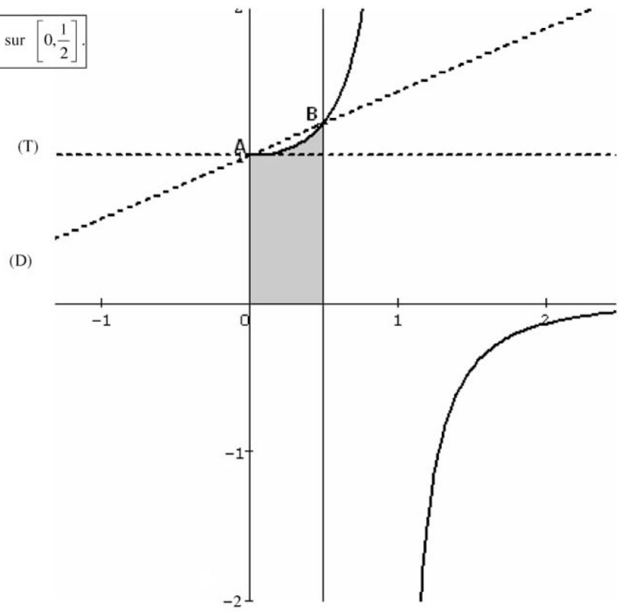
4.a. $\boxed{\text{L'ordonné de B vaut } f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{e}}}$.

b. pour $x = 0$ on obtient $y = \ 1 = f(0)$ donc $\boxed{A \in (D)\text{ , de même } B \in (D)}$.

5.6. C_f étant convexe sur $[0,1[$ elle se trouve au dessus de la tangente à C_f en A sur $[0\ 1,[$

$\boxed{\text{donc } C_f \text{ au dessus de (T) sur } \left[0,\dfrac{1}{2}\right]}$.

De plus $\boxed{C_f \text{ est dessous de la corde (AB) = (D) sur } \left[0,\dfrac{1}{2}\right]}$.



2.2.

1. Voir schéma ci dessus.

2. f est une fonction croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ donc : $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc : $\boxed{\forall x\in \left[0,\frac{1}{2}\right] : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}}$.

Comme les bornes sont dans le sens croissant en utilisant l'inégalité précédente, on en déduit que :

$\int_0^{1/2} 1dx \leq \int_0^{1/2} f(x)dx \leq \int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{e}}dx$ ce qui donne : $\boxed{\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{2}{\sqrt{e}}}$.

3. $\boxed{1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}}$.

On en déduit que : $\forall\ x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\boxed{\frac{e^{-x}}{1-x} = (1+x)e^{-x} + \frac{x^2}{1-x}e^{-x} = (1+x)e^{-x} + x^2 f(x)}$

En intégrant cette égalité, on obtient : $I = \int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx$

4. $\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{1/2} e^{-x}dx$ (IPP)

$= \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}$ donc : $\boxed{\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}}$

5. On sait que : $\forall x\in \left[0,\frac{1}{2}\right]$: $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ en multipliant par x^2 puis en intégrant on obtient :

$\int_0^{1/2} x^2dx \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx \leq \frac{2}{\sqrt{e}}\int_0^{1/2} x^2dx$ ce qui donne : $\boxed{\frac{1}{24} \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}}$

On en déduit alors que : $\boxed{2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leq I \leq 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}}}$

6. Comme C_f est sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ comprise entre la droite (T) d'équation $y = 1$ et la droite (D) d'équation $y = 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1$

on en déduit que : $\int_0^{1/2} 1dx \leq I \leq \int_0^{1/2}\left[2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1\right]dx$ ce qui donne :

$\frac{1}{2} \leq I \leq \left[\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x^2 + x\right]_0^{\frac{1}{2}}$ d'où : $\boxed{\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{4}}$

Exercice 3

Partie 1 : 3.1. a. Y représente le nombre de succès : « attendre au plus 7 minutes » dans une suite de 10 épreuves identiques et indépendantes donc

$\boxed{Y \to B(10, p) \text{ c.à.d : } Y(\Omega) = [[0,10]] \text{ et } \forall\ k \in [[0,10]], P(Y = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}}$.

D'après le cours : $\boxed{E(Y) = 10p \quad \text{et } V(Y) = 10p(1-p).}$

b. Soit A_i « attendre au plus 7 minutes le jour i ».

$P(Z = 0) = P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_{10}) = P(A_1)P(A_2)\ldots.\ P(A_{10})$ (Indépendance)

$= p^{10}$.

Soit k = 1 , $P(Z=1) = P\left(\overline{A_1}\right) = (1-p)$

Soit $2 \leq k \leq 10$ alors $P(Z=k) = P\left(A_1 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}\right) = p^{k-1}(1-p)$

Donc : $\boxed{\begin{cases} P(Z=0) = p^{10} \\ \forall k \in [\![0,10]\!],\ P(Z=k) = p^{k-1}(1-p) \end{cases}}$

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec la formule des probabilités totales on a : $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$

D'où $p_{n+1} = pp_n + \frac{1}{2}(1-p_n)$ d'où : $\boxed{p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right)p_n + \frac{1}{2}}$

b. $\begin{cases} p_{n+1} = \left(p-\frac{1}{2}\right)p_n + \frac{1}{2} \\ \alpha = \left(p-\frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$ par différence on obtient : $p_{n+1} - \alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)(p_n - \alpha)$

donc : $(p_n - \alpha)$ est une suite géométrique de raison $p - \frac{1}{2}$ et de premier terme : $p_1 = 1 - \alpha$.

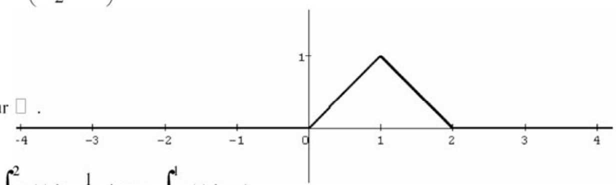
Donc : $\boxed{\forall\ n \in N^*}$, $p_n - \alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1}(1-\alpha)$ d'où : $\boxed{\forall\ n \in N^*,\ p_n = \left(p-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(1-\alpha) + \alpha}$.

c. Comme $0 < p < 1$ on en déduit que : $-\frac{1}{2} < p - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0$ n, ce qui prouve que la suite (p_n) est convergente et que : $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \alpha}$

3. a.b. On cherche ici $P(X < 7)$. $P(X<7) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq 1\right) = P(X^* \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$.

Partie 2 :

1.



2. Il est clair que g est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{0} g(t)dt = \int_{2}^{+\infty} g(t)dt = 0$ et $\int_{0}^{1} g(t)dt = \int_{1}^{2} g(t)dt = \frac{1}{2}$ donc : $\int_{0}^{1} g(t)dt = 1$.

$\boxed{\text{Donc g est une densité de probabilité}}$.

2. $P(T \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)dt = \int_{0}^{1} g(t)dt = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{P(T \leq 1) = 0.5}$.

$P(T \leq 1{,}5) = \int_{-\infty}^{1,5} g(t)dt = \int_{0}^{1} g(t)dt + \int_{1}^{1,5} g(t)dt = \frac{1}{2} + \int_{1}^{1,5} (2-t)dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(2-t)^2\right]_1^{\frac{3}{2}}$ Donc $\boxed{P(T \leq 1{,}5) = \frac{7}{8}}$.

3. Sous réserve d'existence : $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$.

Or : $\int_{-\infty}^{0} tg(t)dt = \int_{2}^{+\infty} tg(t)dt = 0$ et $\int_{0}^{1} tg(t)dt = \int_{0}^{1} t^2dt = \frac{1}{3}$ et $\int_{1}^{2} tg(t)dt = \int_{1}^{2} (2t - t^2)dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$ donc :

$\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = 1$ d'où $\boxed{E(T) = 1}$.

$\boxed{\text{E(T) représente le temps moyen passé par M. Thierex dans les transport en commun par jour}}$.

RAPPORT

EXERCICE 1

C'est l'exercice le mieux traité des trois. La matrice inverse de la matrice P est trouvée par la majorité, seule la caractérisation (éléments diagonaux non nuls) d'une matrice triangulaire inversible n'est pas bien sue ou est confondue avec une matrice quelconque.
Les étudiants les plus faibles élèvent chaque terme d'une matrice A à la puissance n pour donner A^n.
Lors d'une démonstration par récurrence, les étudiants ne savent pas trop à quel ordre doit être faite l'initialisation. Il y a des confusions entre la propriété H_n et la matrice B^n, il n'est donc pas rare de voir la notation $H_n x H_1$ au lieu de $B^n x B_1$ pour montrer l'hérédité.
Le calcul avec les puissances pose souvent problème et les étudiants limitent parfois les simplifications par prudence. Confusions entre "4^n", "$(-4)^n$" et "$4x1^n$".
L'expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n a posé problème dans la dernière partie 1.2.

EXERCICE 2

Le calcul des limites pose de réels problèmes : les limites usuelles ne sont pas bien acquises, la distinction entre limite à gauche et limite à droite n'est pas toujours faite, utilisation abusive de notations incorrectes ($+\infty 4$, 1/0, ...). En outre, il y a des incohérences entre le graphique et le résultat des limites.
Certains étudiants confondent fonction croissante avec fonction positive, ou encore comparent f(0) et f(1) pour montrer la croissance, ne pensent pas du tout à calculer la dérivée et essayent de majorer, minorer f(x).
La formule donnant l'équation d'une tangente n'est pas bien sue et il y a confusion entre équation et droite : y=ax+b et T=ax+b.
La notion de convexité est souvent mal comprise, et la remarque que la droite D est une corde n'a que très très rarement été formulée.
L'encadrement d'une intégrale par deux autres intégrales distingue les meilleurs étudiants des autres qui se limitent par de grossières erreurs à retrouver les résultats donnés. Enfin, les erreurs de signe sont trop courantes lors de l'intégration par parties qui est d'ailleurs superficiellement maîtrisée.

EXERCICE 3 OU PROBLÈME

La loi binomiale est très souvent détectée mais sa notation B(n,p), la donnée de son ensemble de valeurs $X(\Omega)=[[0,n]]$ (et non $[0,n]$, $[[1,n]]$, …), sa formulation : $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ sont très inégales d'un candidat à l'autre.

La loi géométrique tronquée a été confondue avec une loi géométrique classique, la probabilité du succès avec celle de l'échec. Pour ceux qui donnent un résultat juste, l'explication avec une notation précise (on notera A_n l'événement : "attendre au plus 7 minutes le jour n") et l'indépendance de ces événements ne sont guère présentes.

La formulation et l'étude de la suite arithmético-géométrique ont été difficiles car trop abstraites (méconnaissance de la valeur p), d'ailleurs certains étudiants ont donné une valeur concrète à “p”.
La loi normale est connue une fois sur deux et il y a confusion entre la variable X et sa centrée réduite X*.
L'explication, que g est continue et positive, est soit trop succincte presque une affirmation ou au contraire trop détaillée mais fourmille d'erreurs. Les calculs finaux comportent des erreurs car souvent accomplis dans la précipitation.

CONCLUSION

Il est regrettable que beaucoup d'étudiants se présentent au concours avec soit un niveau insuffisant, soit un manque évident de préparation.
Le sujet a permis de valoriser les candidats ayant fourni un travail sérieux toute l'année.
Avec un écart-type de **5.70** et une moyenne générale de **10.25** cette épreuve semble avoir joué son rôle très discriminant.