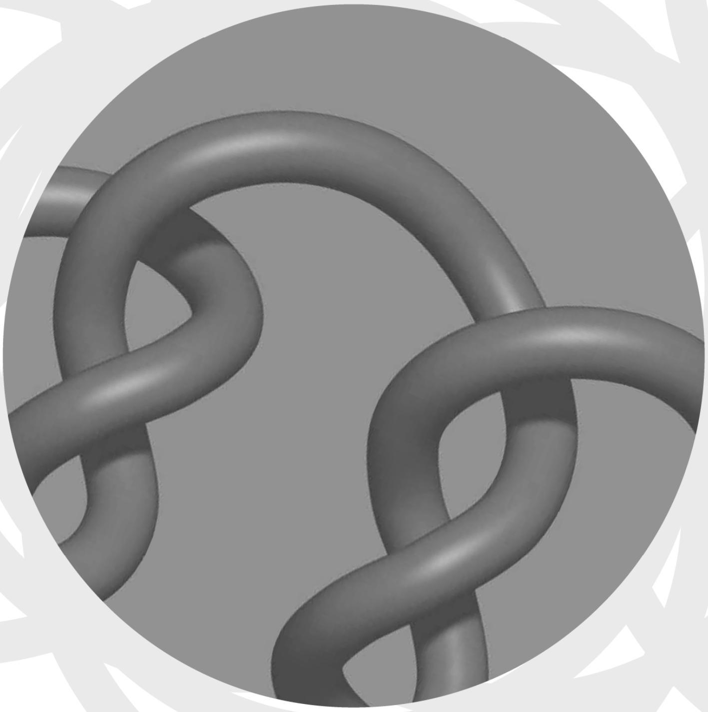
ministère éducation nationale
inspection générale
de l'éducation nationale



OLYMPIADES
de mathématiques
20 mars 2013

Séries ES/L/STI2D/STL/STD2A/STMG/ST2S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1.
   a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2.
   a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3.
   a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4.
   a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.
   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5.
   a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

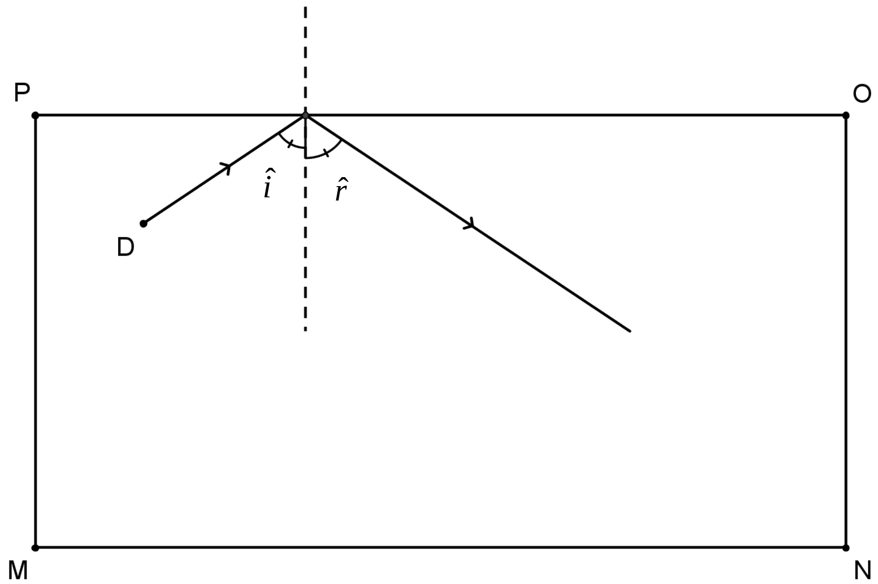
6.
   a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
   En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 : le billard

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.

Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ tant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous $\left(\hat{i} = \hat{r}\right)$.



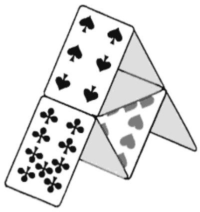
1. On frappe une boule placée au milieu du rail $[\mathrm{MN}]$.
   a) Quel point du rail $[\mathrm{PO}]$ peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   b) Quel point du rail $[\mathrm{PO}]$ peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail $[\mathrm{NO}]$?
   c) Quel point du rail $[\mathrm{NO}]$ peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail $[\mathrm{MN}]$.
   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 : le château de cartes

Savez-vous faire un château de cartes ?

Pour arriver à un étage, c'est tout simple : 



Pour deux étages, ce n'est pas très compliqué non plus :

1.
   a) Combien de cartes sont nécessaires pour construire trois étages ?
   b) Justifier qu'il faut utiliser exactement 26 cartes pour construire quatre étages.

2. On donne le tableau suivant :

Nombre d'étages	1	2	3	4	5
Nombre de cartes utilisées	2	7		26	40

   Pour tout entier n plus grand que 1, on note $C(n)$ le nombre de cartes utilisées pour construire un château à n étage(s).

   Déterminer les nombres a et b en admettant que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on a $C(n) = a\,n^2 + b\,n$.

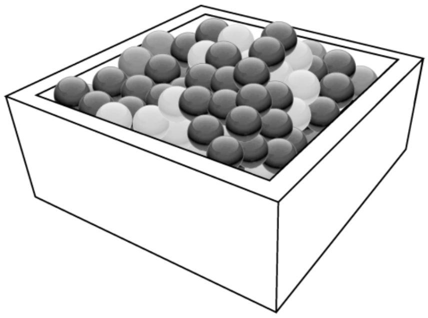
3. À quoi peut bien servir l'algorithme ci-dessous dans le cadre de cet exercice ?

Variables :	n et c sont des entiers naturels
Traitement :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à c la valeur $0{,}5 \times n \times (3 \times n + 1)$
Sortie :	Afficher c.

4.
   a) Écrire un algorithme qui calcule et affiche la taille du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes.
   b) Retrouver, à l'aide d'un calcul, le résultat affiché par l'algorithme.

Exercice 4 : les sacs de billes

Une boîte contient des billes de trois couleurs différentes : rouge, bleu et jaune.



Chaque bille a une valeur et une masse différentes selon sa couleur.

On donne :

Couleur	**rouge**	**bleu**	**jaune**
Masse (en g)	10	20	40
Valeur (en €)	1	3	5

1. Dans cette question uniquement, la boîte contient sept billes rouges, quatre billes bleues et aucune jaune. Le sac de Mehdi ne peut transporter que 90 g de billes.

   On note x (resp. y) le nombre de billes rouges (resp. bleues) qu'il peut prendre.

   Le tableau ci-dessous a été réalisé avec un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7
3	**1**	3	4	5	6	7	8	9	10
4	**2**	6	7	8	9	10	11		
5	**3**	9	10	11	12				
6	**4**	12	13						

   Les entiers de 0 à 7 ont été saisis sur la plage `B1:I1`.

   Les entiers de 0 à 4 ont été saisis sur la plage `A2:A6`.

   La cellule `B2` contient la formule :

```
=SI(B$1+2*$A2<=9;B$1+3*$A2;"")
```

   Cette cellule a été copiée puis collée sur l'ensemble du tableau (plage `B2:I6`).

   a) Justifier que $x+2y\leq 9$. Que représente $x+3y$?

b) À l’aide du tableau, trouver le nombre de billes rouges et bleues qu’il doit prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible.

2. Dans cette question uniquement la boîte contient cinq billes rouges, trois bleues et deux jaunes.

   a) Le sac d’Alexandre ne peut contenir que 50 g de billes.

      Combien de billes de chaque couleur doit-il prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible ? Préciser cette valeur.

   b) Le sac de Béa ne peut contenir que 70 g de billes.

      Combien de billes de chaque couleur doit-elle prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible ? Préciser cette valeur.

   c) Le sac de Clarisse ne peut contenir que 80 g de billes.

      Combien de billes de chaque couleur doit-elle prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible ? Préciser cette valeur.

3. Dans cette question uniquement, la boîte contient six billes rouges, quatre bleues et trois jaunes.

   Écrire un algorithme qui demande à l’utilisateur de saisir la masse exacte de billes qu’il souhaite prendre et qui affiche si cela est possible ou pas.