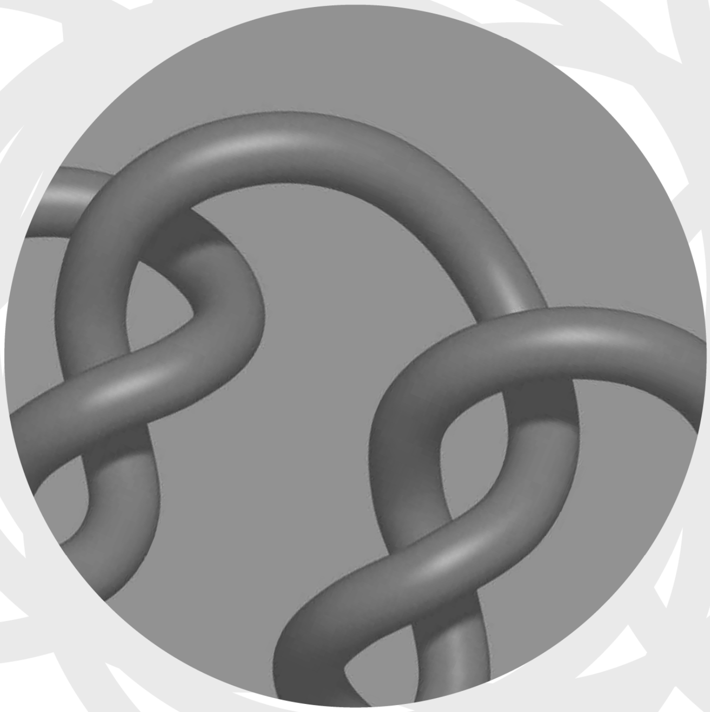
ministère éducation nationale — inspection générale de l'éducation nationale



OLYMPIADES
de mathématiques
20 mars 2013

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1.
   a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2.
   a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3.
   a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4.
   a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.
   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5.
   a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

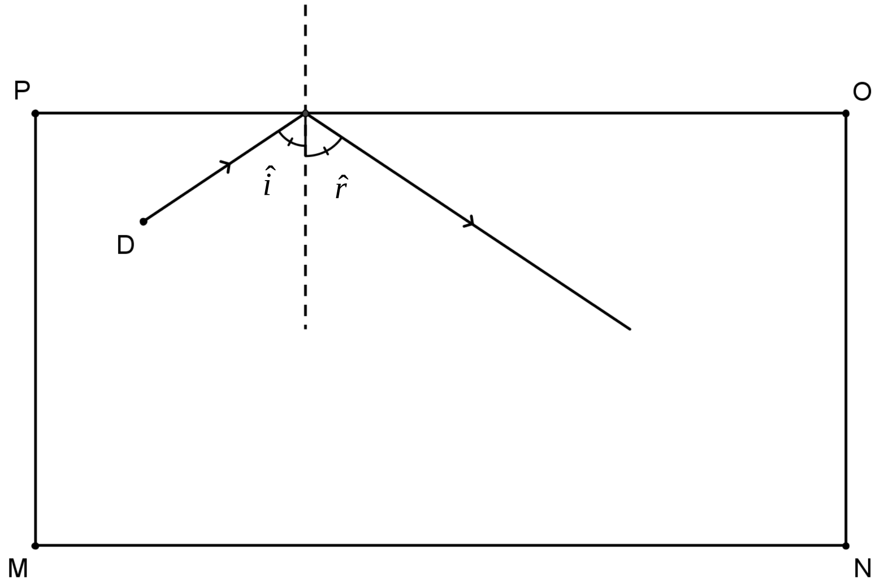
6.
   a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair. En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 : le billard

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.

Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ tant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous $\left(\hat{i} = \hat{r}\right)$.



1. On frappe une boule placée au milieu du rail $[\mathrm{MN}]$.
   a) Quel point du rail $[\mathrm{PO}]$ peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   b) Quel point du rail $[\mathrm{PO}]$ peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail $[\mathrm{NO}]$?
   c) Quel point du rail $[\mathrm{NO}]$ peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail $[\mathrm{MN}]$.
   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 : les lampadaires

Le plan d'un lotissement de maisons est donné sous la forme d'un quadrillage composé de cinq lignes et cinq colonnes numérotées de 1 à 5. Les maisons de ce lotissement sont représentées par des carrés grisés.

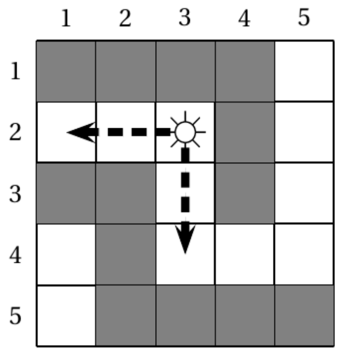


Figure 1

On souhaite éclairer l'ensemble du lotissement à l'aide de lampadaires.

Un lampadaire éclaire toute la ligne et toute la colonne à partir de la case sur laquelle il est positionné (tant que la lumière qu'il émet ne rencontre pas de maison ou la frontière du lotissement).

Par exemple, sur la figure 1, un lampadaire positionné en (2 ; 3) (2^{e} ligne et 3^{e} colonne) éclairera les cases (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 3) et (4 ; 3).

1. Combien de lampadaires faut-il placer **au minimum** pour éclairer l'ensemble du lotissement de la figure 1 ? À quelles positions les placer ?
2. Si le lotissement ne contient aucune maison, combien de lampadaires faut-il placer **au minimum** pour l'éclairer entièrement ? À quelles positions les placer ?
3. Dessiner le plan d'un lotissement pour lequel il faut placer sept lampadaires au minimum pour l'éclairer entièrement.
4. Combien de lampadaires faut-il utiliser au minimum pour éclairer l'ensemble des lotissements suivants ?

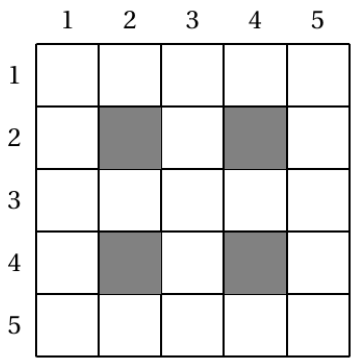


Figure 2

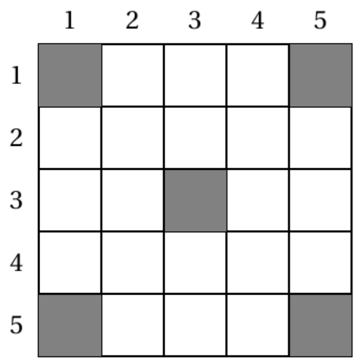


Figure 3

5. On code un lotissement à l'aide d'un tableau `T[i,j]` où *i* (resp. *j*) désigne le numéro de la ligne (resp. colonne) avec $1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$. On convient que :

- `T[i,j]` vaut 0 si la case (*i* ; *j*) n'est pas éclairée ;
- `T[i,j]` vaut 1 si la case (*i* ; *j*) est éclairée ;
- `T[i,j]` vaut 2 si la case (*i* ; *j*) contient une maison.

On suppose un lotissement entièrement codé par un tableau `T`.

Écrire un algorithme qui affiche si oui ou non le lotissement est entièrement éclairé.

6.

a) Dessiner le plan du lotissement associé à un tableau `T` obtenu à l'aide de l'algorithme ci-dessous :

Variables :	i, j et s sont des entiers naturels			
	T est un tableau			
Initialisation :	Affecter à s la valeur 1.			
Traitement :	Pour i variant de 1 à 5			
		Pour j variant de 1 à 5		
			Si (2*i-j)==s alors	
				Affecter à T[i,j] la valeur 2
				s prend la valeur s+1
			Sinon affecter à T[i,j] la valeur 0	

b) Combien de lampadaires faut-il placer au minimum pour éclairer entièrement ce lotissement ?

Exercice 4 : les triangles olympiques

On considère un triangle T dont les côtés mesurent a, b et c.

Un tel triangle T est dit « olympique » lorsque que :

- a, b et c sont des entiers naturels ;
- $1 < a \leq b \leq c$;
- T est un triangle rectangle;
- $a^2 = b + c$.

1. Donner un exemple de triangle olympique. On précisera les mesures des trois côtés.
2.
   a) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que b et c sont des entiers consécutifs, c'est-à-dire que $c = b + 1$.
   b) En déduire une expression simple de b en fonction de a.
   c) Le nombre entier a peut-il être un nombre pair ?
   d) Un triangle olympique peut-il être isocèle ?
   e) Existe-t-il un triangle olympique T pour tout nombre entier a impair supérieur à 2 ?
3. Dans toute la suite, on suppose que a est un nombre impair.
   a) Calculer, en fonction de a, l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle olympique.
   b) Combien y a-t-il de valeurs de a pour lesquelles l'aire $\mathcal{A}$ est inférieure ou égale à 2013 ?
4. On tire trois fois de suite avec remise un jeton d'une urne qui en contient cent numérotés de 1 à 100.

   Calculer la probabilité que les numéros des trois jetons définissent (dans l'ordre de tirage) un triangle olympique de côtés de mesure a, b et c.