Question préliminaire :

Le chemin (x_1, x_2, x_5, x_4) est un chemin de longueur minimale $1+3+1=5$.

Il n'est pas unique, le chemin $(x_1, x_2, x_3, x_5, x_4)$ convient aussi car de longueur $1+1+2+1=5$.

Mot mystère :

La date de naissance est 1254. C'est la date de naissance du célèbre explorateur vénitien Marco POLO. Le mot mystère est POLO.

Question 1 :

$d(x_3, x_1) = \text{Min} \{d(x_3, x_1), d(x_3, x_1) + d(x_1, x_1)\} = \text{Min} \{d(x_3, x_1); +\infty\} = d(x_3, x_1) = 3$: pas de modification.

$d(x_3, x_2) = \text{Min} \{d(x_3, x_2), d(x_3, x_1) + d(x_1, x_2)\} = \text{Min} \{1; 3 + 1\} = 1$: pas de modification

$d(x_3, x_3) = \text{Min} \{d(x_3, x_3), d(x_3, x_1) + d(x_1, x_3)\} = \text{Min} \{+\infty; 3 + 3\} = 6$: on remplace $+\infty$ par 6 et position(3 ; 3) = x_1 .

$d(x_3, x_4) = \text{Min} \{d(x_3, x_4), d(x_3, x_1) + d(x_1, x_4)\} = \text{Min} \{+\infty; 3 + \infty\} = +\infty$: pas de modification.

$d(x_3, x_5) = \text{Min} \{d(x_3, x_5), d(x_3, x_1) + d(x_1, x_5)\} = \text{Min} \{2; 3 + \infty\} = 2$: pas de modification.

Question 2 :

$d(x_1, x_1) = \text{Min} \{d(x_1, x_1), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_1)\} = \text{Min} \{+\infty; 1 + 1\} = 2$: on remplace $+\infty$ par 2 et position(1 ; 1) = x_2 .

$d(x_1, x_2) = \text{Min} \{d(x_1, x_2), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_2)\} = \text{Min} \{1; 1 + 2\} = 1$: pas de modification

$d(x_1, x_3) = \text{Min} \{d(x_1, x_3), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)\} = \text{Min} \{3; 1 + 1\} = 2$: on remplace 3 par 2 et position(1 ; 3) = x_2 .

$d(x_1, x_4) = \text{Min} \{d(x_1, x_4), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_4)\} = \text{Min} \{+\infty; 1 + 5\} = 6$: on remplace $+\infty$ par 6 et position(1 ; 4) = x_2 .

$d(x_1, x_5) = \text{Min} \{d(x_1, x_5), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_5)\} = \text{Min} \{+\infty, 1 + 3\} = 4$: on remplace $+\infty$ par 4 et position(1 ; 5) = x_2 .

Question 3 :

Le tableau des *distances* nous indique que la distance minimale pour aller du sommet x_1 au sommet x_4 est de 5. Le tableau des *positions* nous indique qu'il faut passer par x_5 pour avoir un chemin de longueur minimale, puis pour aller du sommet x_1 au sommet x_5 il faut passer par x_2 pour avoir un chemin de longueur minimale. Finalement le chemin (x_1, x_2, x_5, x_4) est un des chemins de longueur minimale 5 qui relie les sommets x_1 à x_4 . On retrouve bien le chemin de la question préliminaire sans toutefois retrouver tous les chemins de longueur minimale.

Enigme :

On doit choisir le tableau 2 qui correspond à la recherche du chemin le plus court en temps.

Pour aller de (1) à (4), il faut passer par (5). Pour aller de (1) à (5) il faut passer par (2). Donc un chemin qui répond au problème est $((1),(2),(5),(4)) = (\text{Parme}, \text{Bologne}, \text{Florence}, \text{Rome})$. Le trajet est le plus court en temps et il est estimé à 338 min = 5 heures et 38 min. C'est aussi le chemin le plus court en distance 518 km mais ce n'est pas le parcourt le moins cher.

En conclusion, M. Bonneau devra donc suivre le chemin le plus rapide (Parme, Bologne, Florence, Rome) car c'est celui qui répond aux critères qu'il s'est fixé.