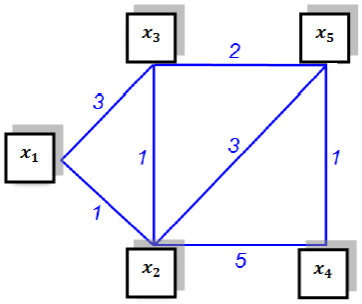
Algorithme de Roy-Warshall-Floyd (mot mystère 5)

A) Problématique :



Dans de nombreux problèmes nous sommes amenés à déterminer le chemin le plus court entre deux points dans un « réseau donné ».

Question préliminaire : déterminer un chemin de longueur minimale pour aller du sommet x_1 au sommet x_4. Est-il unique ?

Mot mystère : le mot mystère est le nom d'un célèbre explorateur vénitien. Sa date de naissance est le nombre écrit avec les indices d'un des chemins de longueur minimale.

B) Phase de modélisation et algorithme de Roy-Warshall-Floyd

Pour modéliser cette situation nous allons résumer les données du « réseau» à l'aide du tableau initial des *distances/positions* suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$+\infty$	1 (x_2)	3 (x_3)	$+\infty$	$+\infty$
x_2	1 (x_1)	$+\infty$	1 (x_3)	5 (x_4)	3 (x_5)
x_3	3 (x_1)	1 (x_2)	$+\infty$	$+\infty$	2 (x_5)
x_4	$+\infty$	5 (x_2)	$+\infty$	$+\infty$	1 (x_5)
x_5	$+\infty$	3 (x_2)	2 (x_3)	1 (x_4)	$+\infty$

Les distances :
S'il existe un arc (x_i, x_j) alors $distance(i,j) = d(x_i, x_j)$.
Sinon, $distance(i,j) = +\infty$.

Les positions sont écrites entre parenthèses :
Si x_j est le successeur de x_i alors $position(i,j) = x_j$.
Sinon, on ne modifie rien.

Puis nous allons appliquer à ce tableau le très bel algorithme de Roy-Warshall-Floyd.

Etape 1 : distance minimale entre l'arc (x_i, x_j) et le chemin (x_i, x_1, x_j)
Pour chaque couple de sommets (x_i, x_j), on calcule la distance minimale entre l'arc (x_i, x_j) et le chemin (x_i, x_1, x_j) par $d(x_i, x_j) = Min\{d(x_i, x_j), d(x_i, x_1) + d(x_1, x_j)\}$.

Commençons par les couples de sommets (x_1, x_j) :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$+\infty$	1 (x_2)	3 (x_3)	$+\infty$	$+\infty$

$d(x_1, x_1) = +\infty$ donc $d(x_1, x_1) + d(x_1, x_j) = +\infty$
et $d(x_1, x_j) = Min\{d(x_1, x_j), +\infty\} = d(x_1, x_j)$:
la première ligne du tableau n'est pas modifiée.

Continuons par les couples de sommets (x_2, x_j) :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$+\infty$	1 (x_2)	3 (x_3)	$+\infty$	$+\infty$
x_2	1 (x_1)	$+\infty$	1 (x_3)	5 (x_4)	3 (x_5)

$d(x_2, x_1) = Min\{d(x_2, x_1), d(x_2, x_1) + d(x_1, x_1)\}$
$= Min\{d(x_2, x_1), +\infty\} = d(x_2, x_1)$: pas de modification.

$d(x_2, x_2) = Min\{d(x_2, x_2), d(x_2, x_1) + d(x_1, x_2)\}$
$= Min\{+\infty; 1 + 1\} = 2$: on remplace $+\infty$ par 2.

$d(x_2, x_3) = Min\{d(x_2, x_3), d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3)\} = Min\{1 ; 1 + 3\} = 1$: pas de modification.
$d(x_2, x_4) = Min\{d(x_2, x_4), d(x_2, x_1) + d(x_1, x_4)\} = Min\{5 ; +\infty\} = 5$: pas de modification.
$d(x_2, x_5) = Min\{d(x_2, x_5), d(x_2, x_1) + d(x_1, x_5)\} = Min\{3 ; +\infty\} = 3$: pas de modification.

La deuxième ligne du tableau des *distances/positions* devient :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$+\infty$	1 (x_2)	3 (x_3)	$+\infty$	$+\infty$
x_2	1 (x_1)	2 (x_1)	1 (x_3)	5 (x_4)	3 (x_5)

Lorsque un chemin (x_i, x_j) est remplacé par un chemin plus court (x_i, x_k, x_j) qui passe par le sommet x_k, le tableau des $positions$ est modifié par $position(i,j) = x_k$. Ici, $position(2,2) = x_1$.

On termine avec les couples de sommets (x_3, x_j) et (x_4, x_j) et (x_5, x_j) et on obtient le résultat suivant en fin d'étape :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$+\infty$	1 (x_2)	3 (x_3)	$+\infty$	$+\infty$
x_2	1 (x_1)	2 (x_1)	1 (x_3)	5 (x_4)	3 (x_5)
x_3	3 (x_1)	1 (x_2)	6 (x_1)	$+\infty$	2 (x_5)
x_4	$+\infty$	5 (x_2)	$+\infty$	$+\infty$	1 (x_5)
x_5	$+\infty$	3 (x_2)	2 (x_3)	1 (x_4)	$+\infty$

Question 1 : retrouver la ligne 3 du tableau des *distances/positions* obtenu en fin d'étape 1.

Etape 2 : distance minimale entre les chemins (x_i, x_j) et (x_i, x_2, x_j)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2 (x_2)	1 (x_2)	2 (x_2)	6 (x_2)	4 (x_2)
x_2	1 (x_1)	2 (x_1)	1 (x_3)	5 (x_4)	3 (x_5)
x_3	2 (x_2)	1 (x_2)	2 (x_2)	6 (x_2)	2 (x_5)
x_4	6 (x_2)	5 (x_2)	6 (x_2)	10 (x_2)	1 (x_5)
x_5	4 (x_2)	3 (x_2)	2 (x_3)	1 (x_4)	6 (x_2)

Comme on cherche la longueur minimale entre les chemins (x_i, x_j) et (x_i, x_2, x_j) du tableau des nouvelles distances modifiées après l'étape 1, cela revient à chercher les longueurs minimales du tableau initial parmi les chemins (x_i, x_j), (x_i, x_1, x_j), (x_i, x_2, x_j), (x_i, x_1, x_2, x_j) et (x_i, x_2, x_1, x_j).

En fin d'étape, on obtient le tableau des *distances/positions* ci-contre.

Question 2 : retrouver la ligne 1 du tableau des *distances/positions* obtenu en fin d'étape 2.

Etape 3 : distance minimale entre les chemins (x_i, x_j) et (x_i, x_k, x_j) pour $k = 3$, $k = 4$ et $k = 5$

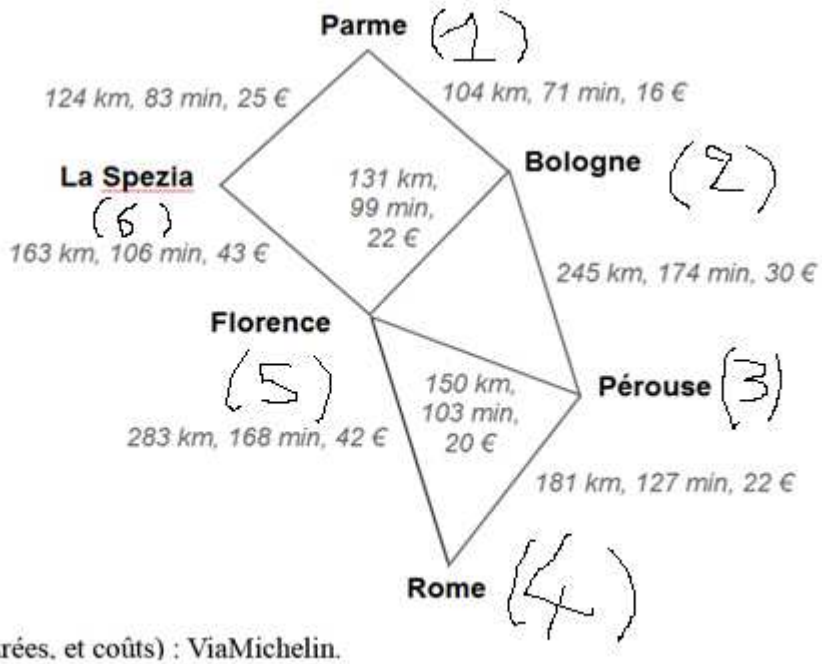
Nous poursuivons la même démarche pour $k = 3$, $k = 4$ et $k = 5$ et obtenons le tableau final des *distances/positions* que nous admettrons :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2 (x_2)	1 (x_2)	2 (x_2)	5 (x_5)	4 (x_2)
x_2	1 (x_1)	2 (x_1)	1 (x_3)	4 (x_5)	3 (x_5)
x_3	2 (x_2)	1 (x_2)	2 (x_2)	3 (x_5)	2 (x_5)
x_4	5 (x_5)	4 (x_5)	3 (x_5)	2 (x_5)	1 (x_5)
x_5	4 (x_2)	3 (x_2)	2 (x_3)	1 (x_4)	2 (x_4)

Question 3 : déduire de ce tableau final un chemin de longueur minimale pour aller du sommet x_1 au sommet x_4. Bien sûr il faut imaginer que l'on peut programmer cet algorithme sur un ordinateur. On obtiendrait ainsi un des plus courts chemins instantanément même avec un réseau de points très important.

C) Enigme : M. Jean Bonneau habite la ville de Parme, il doit se rendre en voiture le plus rapidement possible à Rome pour retrouver sa compagne. Pour l'aider, son ami informaticien Roy lui a transmis avant de partir en vacances les trois tableaux des « *distances/position* » obtenus à partir du logiciel de programmation Python avec pour seule information la carte ci-dessous et l'annotation à son dos : « J'ai numéroté les villes de 1 à 6 dans mon algorithme» ...

Pouvez-vous aider M. Bonneau à choisir son trajet en l'absence de son ami ?



Source (distances, durées, et coûts) : ViaMichelin.

Tableau 1

	1	2	3	4	5	6
1	208	104	349	518	235	124
	(2)	(2)	(2)	(5)	(2)	(6)
2	104	208	245	414	131	228
	(1)	(1)	(3)	(5)	(5)	(1)
3	349	245	300	181	150	313
	(2)	(2)	(5)	(4)	(5)	(5)
4	518	414	181	362	283	446
	(5)	(5)	(3)	(3)	(5)	(5)
5	235	131	150	283	262	163
	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)	(6)
6	124	228	313	446	163	248
	(1)	(1)	(5)	(5)	(5)	(1)

Tableau 2

	1	2	3	4	5	6
1	142	71	245	338	170	83
	(2)	(2)	(2)	(5)	(2)	(6)
2	71	142	174	267	99	154
	(1)	(1)	(3)	(5)	(5)	(1)
3	245	174	206	127	103	209
	(2)	(2)	(5)	(4)	(5)	(5)
4	338	267	127	254	168	274
	(5)	(5)	(3)	(3)	(5)	(5)
5	170	99	103	168	198	106
	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)	(6)
6	83	154	209	274	106	166
	(1)	(1)	(5)	(5)	(5)	(1)

Tableau 3

	1	2	3	4	5	6
1	32	16	46	68	38	25
	(2)	(2)	(2)	(3)	(2)	(6)
2	16	32	30	52	22	41
	(1)	(1)	(3)	(3)	(5)	(1)
3	46	30	40	22	20	63
	(2)	(2)	(5)	(4)	(5)	(5)
4	68	52	22	44	42	85
	(3)	(3)	(3)	(3)	(5)	(5)
5	38	22	20	42	40	43
	(2)	(2)	(3)	(4)	(3)	(6)
6	25	41	63	85	43	50
	(1)	(1)	(5)	(5)	(5)	(1)