Luc PONSONNET - Académie de Nice - TraAM 2013-2014

" TRAVERSER UNE RIVIERE"

Niveau de la classe : première scientifique

Testée avec une classe de première scientifique sur deux séances de 55 min

Compétences du programme d'enseignement des Mathématiques en lien avec cette activité

. Choisir une décomposition (d'un vecteur) pertinente dans le cadre de la résolution d'un problème.
Plus exactement ici, choisir un repère pour décomposer un vecteur vitesse.
. Calculer la mesure d'un triangle rectangle.

Compétences TICE

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

. Savoir construire une figure.
. Construire des vecteurs (ici des vitesses) et leur somme vectorielle.
. Afficher des mesures (ici le *temps = distance/vitesse* et un angle).

Descriptif rapide de l'activité

Un nageur doit traverser une rivière le plus rapidement possible. Ce nageur se déplace à une vitesse constante et la rivière admet un courant que l'on supposera aussi constant. Problématique : en quel point arrivera-t-il sur l'autre rive ?

Sommaire

1. PRESENTATION DE L'ACTIVITE *Page 2*

2. OBJECTIFS DE CETTE ACTIVITE *Page 3*

3. SCENARIO DE MISE EN ŒUVRE DE CETTE ACTIVITE *Page 3*

4. LA PLACE DES OUTILS NUMERIQUES AU COURS DE CETTE ACTIVITE *Page 8*

1. PRESENTATION DE L'ACTIVITE

Enoncé et consignes donnés aux élèves

1) ENONCE ELEVE

Paul part à la nage du bord d'une rivière. Quel sera le lieu d'arrivée sur l'autre rive s'il souhaite traverser le plus rapidement possible ?

Données :

- on suppose que Paul nage à une vitesse v_P constante de 1,2 m/s en conservant pendant tout le trajet la direction prise au départ;
- la rivière possède une largeur de 30 m et son courant sera considéré toujours égal à $v_c = 0{,}5$ m/s.

2) CONSIGNES

C1) Vous travaillerez par îlots de 4 à 5 personnes. La phase de recherche débutera par une investigation personnelle.

C2) Vous pourrez utiliser le logiciel GeoGebra pour vous aider à modéliser la situation à l'aide d'un fichier *traverser.ggb* .

2. OBJECTIFS DE CETTE ACTIVITE

Textes de référence

1) Extrait du programme de mathématiques classe de première S (Bulletin Officiel du 30 septembre 2010) :

« Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :
- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit ».

2) Extrait du document ressource intitulé « Les compétences mathématiques au lycée » :

Modéliser
« Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques …).
Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.
Valider ou invalider un modèle ».

Représenter
« Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique…) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique.
Passer d'un mode de représentation à un autre.
Changer de registre ».

Communiquer

« Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel.
Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.
Critiquer une démarche ou un résultat.
S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit ».

Détails des objectifs de la mise œuvre de l'activité

L'objectif principal de cette activité est la modélisation d'une situation ouverte et « concrète » à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Il faudra que les élèves choisissent un cadre et des représentations adaptés pour élaborer une démarche de résolution.
Enfin, le travail en groupes devrait entraîner les élèves à « expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit » avec leurs camarades et le professeur.

3. SCENARIO DE MISE EN ŒUVRE DE CETTE ACTIVITE

Ce qui a été fait avant

Les chapitres sur les vecteurs et de trigonométrie ont déjà été traités en la classe. Plus précisément, les élèves maîtrisent la notion d'angle orienté de vecteurs et savent décomposer un vecteur dans un repère pour résoudre un problème.

Les élèves ont déjà utilisé le logiciel GeoGebra. Un didacticiel sur GeoGebra a été complété depuis le début de l'année au fur et à mesure des besoins pour expliquer les fonctionnalités du logiciel et reste accessible aux élèves à tout moment sur l'ENT.

Déroulement de la séquence

Cette activité a été expérimentée en demi-classe d'une première scientifique par îlots de 4 à 5 élèves.

Deux séances de 55 min en salle informatique + un compte-rendu individuel à faire à la maison et à rendre au professeur par l'intermédiaire de l'ENT.

Première séance (55 min) :

La séance débute par une lecture silencieuse et une appropriation personnelle de l'énoncé.

Comme indiqué dans l'énoncé, chaque îlot rejoint les ordinateurs pour essayer de représenter la situation à l'aide d'un fichier GeoGebra.

Après 15 minutes de recherche, le professeur procède alors à une synthèse des premières idées qui émergent autour de cette étape de « modélisation-construction». C'est l'occasion de préciser qu'une vitesse peut être représentée par un vecteur et qu'il est possible d'afficher un vecteur avec le logiciel GeoGebra. Il faut aussi faire comprendre à tous les élèves que l'on doit pouvoir, dans la construction GeoGebra, choisir au départ une direction prise par le vecteur $\overrightarrow{v_P}$ (c'est-à-dire le nageur) et qu'ensuite seulement, le vecteur $\overrightarrow{v_P}$ reste constant.

Chaque îlot poursuit son travail. Les élèves devront être plus ou moins aidés pour surmonter les étapes suivantes (si O est le point de départ du nageur (voir figure 1)) :

- la construction du vecteur « vitesse de nage » $\overrightarrow{v_P}$. Un point P du cercle de centre O et de rayon 1,2 pourra être construit avant ;
- l'obtention de la somme vectorielle $\vec{V} = \overrightarrow{v_P} + \overrightarrow{v_C}$ en tapant dans la zone de saisie la formule : $S = O + Vecteur[O, P] + Vecteur[O, C]$;
- l'affichage de la mesure $temps = Distance[O, B]/Distance[O, V]$ qui donne le « temps de traversée » du nageur.

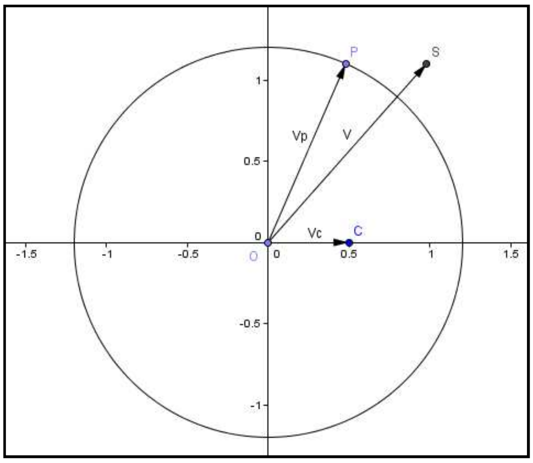


Figure 1

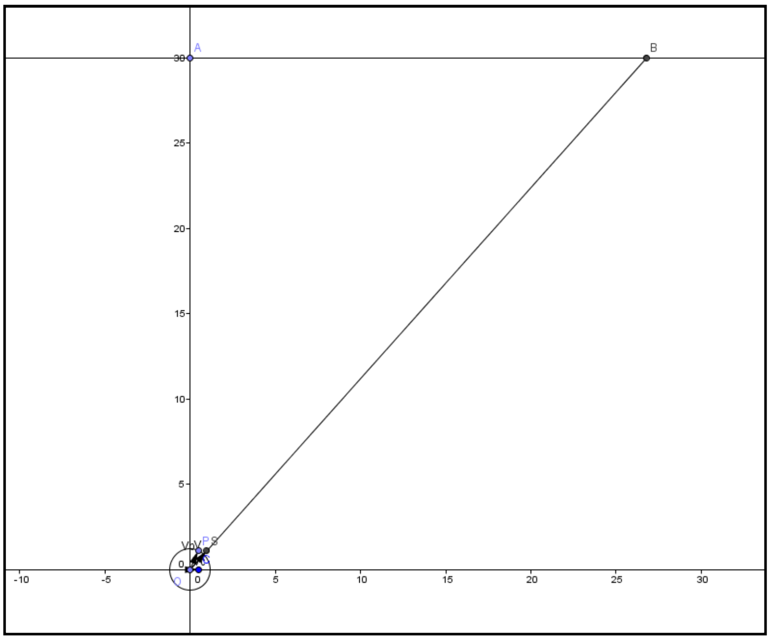
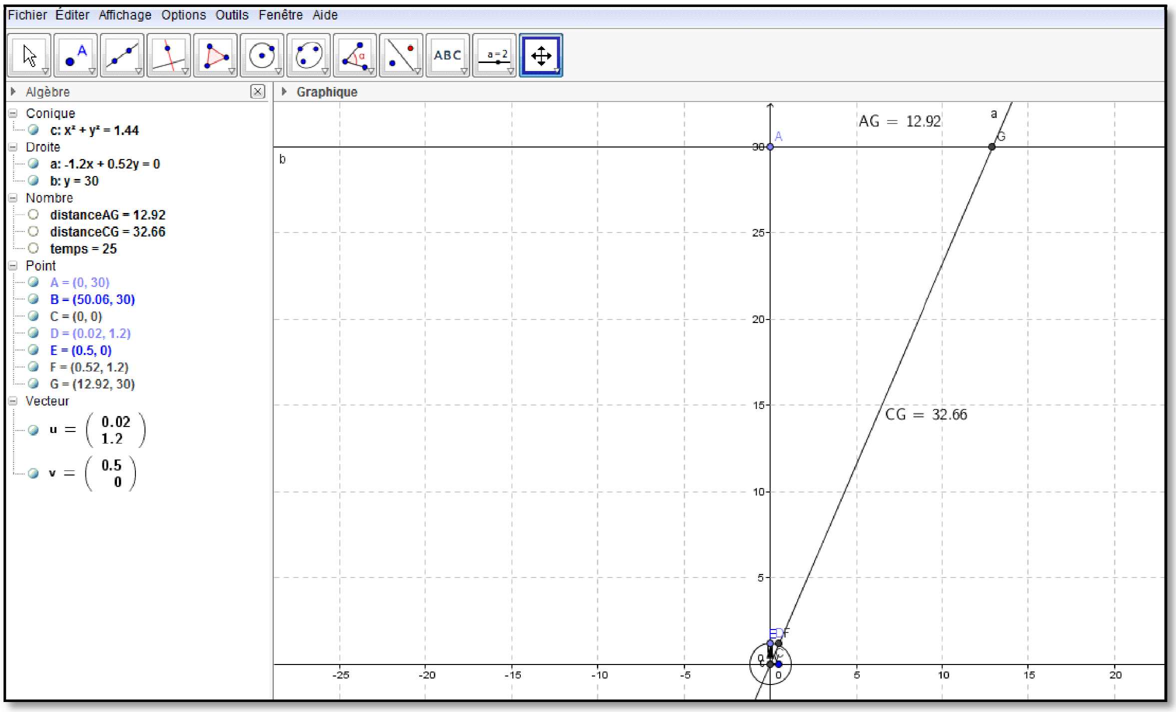


Figure 2

A la fin de la séance chaque îlot a obtenu son fichier *traverser.ggb* parfois assez incomplet…

Voici un exemple de fichier *traverser.ggb* d'un des îlots :



Comme signalé précédemment, cette première séance de modélisation a aidé les élèves à mieux comprendre qu'une vitesse peut être représentée par un vecteur et que même si Paul nage selon une direction constante, celle de $\overrightarrow{v_P}$, sous l'influence du courant $\overrightarrow{v_C}$, il se déplacera en réalité selon la direction définie par le vecteur somme $\vec{V} = \overrightarrow{v_P} + \overrightarrow{v_C}$;

En déplaçant le point P « libre » sur le cercle, les élèves s'aperçoivent que le temps de parcours du nageur ne semble dépendre que d'une seule variable, l'angle $\propto = (\overrightarrow{v_C}, \overrightarrow{v_P})$ que prend dès le départ le nageur, et qu'il conserve tout au long de la traversée. Le temps de traversée minimal de 25 secondes est ainsi conjecturé. Par contre il est difficile d'obtenir la distance AB avec précision, un groupe ne l'a même pas affichée.

Remarque : pour tracer avec GeoGebra la représentation graphique du temps de traversée en fonction de l'angle $\propto = (\overrightarrow{v_C}, \overrightarrow{v_P})$, on aurait pu placer un point $M = (\alpha, temps)$ et à l'aide d'un clic-droit sur ce point activer sa fonction trace.

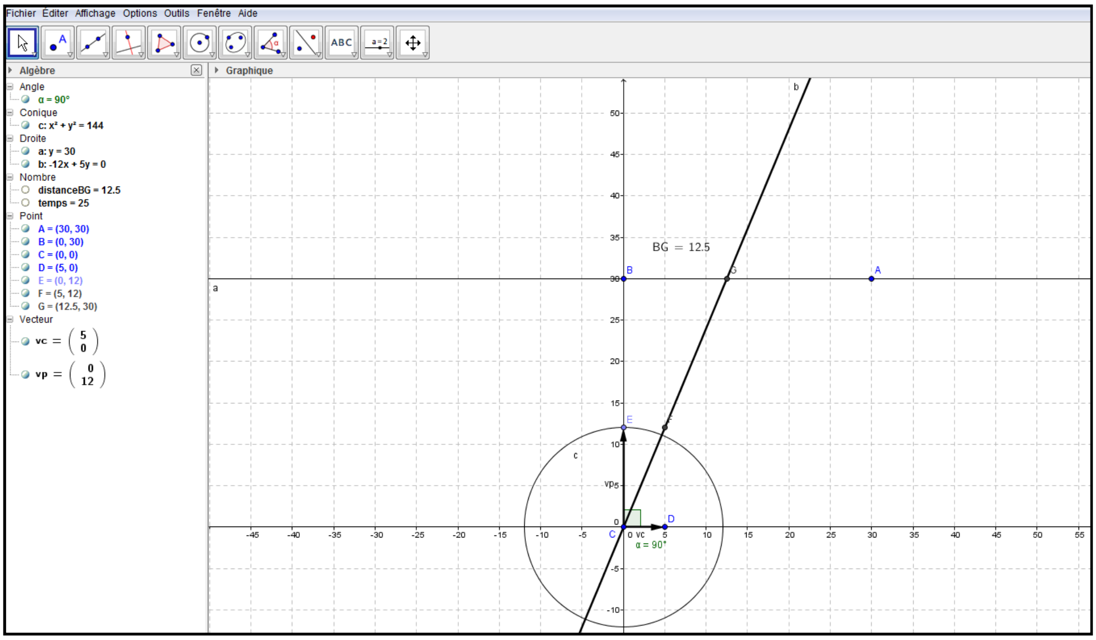
Le temps de 55 minutes consacré à l'élaboration de ce fichier GeoGebra et à l'expression d'une conjecture est important mais semble nécessaire à une réelle compréhension de l'énoncé.

Deuxième séance (55 min) :

En début de séance, relecture de l'énoncé, en s'aidant du fichier *traverser.ggb* réalisé la séance précédente, pour mieux en comprendre la situation. Le fichier *traverser.ggb* est un peu modifié selon les cas pour afficher en plus du temps de traversée :

- La distance AB ;
- les noms $\overrightarrow{v_C}$ et $\overrightarrow{v_P}$ des vecteurs en adéquation avec l'énoncé ;
- l'angle $\propto = (\overrightarrow{v_C}, \overrightarrow{v_P})$.

<u>Une impression écran d'un fichier *traverser.ggb* d'élève après modifications :</u>



Remarque : ici les élèves ont choisi de multiplier par 10 les vitesses pour rendre la figure plus lisible.
Bien sûr dans la zone de saisie a été rentrée la formule « adaptée» : *temps = Distance[C,G]/(Distance[C,F]*0.1)*

<u>Phase de « simulation » et de conjecture :</u>

Les conjectures émises sont affinées, en plus du temps de traversée minimal souvent proche de 25 secondes, sont précisées, la valeur de l'angle $(\overrightarrow{v_C}, \overrightarrow{v_P}) = 90°$ et la longueur $BG = 12{,}5\ m$.

<u>Phase de résolution théorique :</u>

Après un temps de recherche, pour débloquer la situation, le professeur demande aux élèves de représenter à l'échelle sur une feuille de papier les vecteurs $\overrightarrow{v_C}$, $\overrightarrow{v_P}$ et l'angle $\alpha = (\overrightarrow{v_C}, \overrightarrow{v_P})$. Il amène progressivement les élèves à une étude analytique, et à décomposer le vecteur somme $\vec{V} = \overrightarrow{v_P} + \overrightarrow{v_C}$ dans un repère par $\vec{V}\begin{pmatrix} v_C + v_P \times \cos(\alpha) \\ v_P \times \sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

Un nouveau temps de recherche est laissé à la demi-classe.
Tous les groupes finissent par découvrir la formule $temps = \frac{30}{1{,}2 \times \sin(\alpha)}$ après avoir saisi que le temps de traversée de la rivière ne dépendait que de la composante verticale $V_y = v_P \times \sin(\alpha)$ de la vitesse $\vec{V}$.

Voici une erreur fréquente : beaucoup d'élèves ont calculé le temps minimal de parcourt en utilisant directement la valeur particulière de $\propto = \frac{\pi}{2}$ rad. L'argument avancé est le suivant : « le logiciel prouve que pour $\propto = 90°$, le temps de traversée est minimal, c'est pourquoi on a utilisé la valeur de $\propto = 90°$». Après un échange interne à chaque îlot, les élèves ont fini par comprendre qu'il faut trouver une démarche générale avec comme variable $\propto$ et démontrer que le temps de parcourt est justement minimal pour $\propto = \frac{\pi}{2}$ rad.

Un nouveau temps de réflexion est laissé aux élèves.
Personne n'arrive à comprendre pourquoi la valeur de la variable $temps$ est minimale pour $\propto = \frac{\pi}{2}$ rad. Des explications sont données par le professeur à partir du cercle trigonométrique.

Le calcul du temps minimal de traversée et de la distance AB sont alors effectués de manière autonome par les élèves en fin de deuxième séance.

Deux comptes-rendus individuels :

Compte-rendu n°1 :

Le temps minimal pour traverser la rivière semble être de 25 secondes.

Preuve :

Le vecteur Vy correspond à la vitesse de nage du nageur, le vecteur Vp correspond au courant de la rivière donc le vecteur V (Vy ; Vp) correspond à la vitesse de traverser de la rivière.

α correspond à l'angle (Vy, 0, Vp), on cherche à déterminer celui-ci pour que le temps de traverser soit minimal

Vy=1,2*sin(α)

T=d/v

T=30/ (1,2*sin(α))

Donc pour que T soit minimal, il faut que sin(α) soit maximal donc que α soit égal à 90° :

T=30/1,2

T=25s

Finalement, le temps minimal de traverser est de 25 secondes et il est atteint pour α =90°

L'élève n'a pas répondu totalement à la question puisqu'il ne précise pas en quel point le nageur arrive sur l'autre rive ! Les connaissances et notations sur les angles de vecteurs ne sont pas utilisées…

Compte-rendu n°2 :

A l'aide du fichier Geogebra, nous pouvons voir que le temps est le plus court lorsque l'angle des vecteurs Vc et Vp vaut 90°.

On cherche tout d'abord à calculer le temps que mettra Paul à parcourir la rivière. Puis nous chercherons Vx, et enfin la distance BG.

Vx= Vc+Vp*cos(alpha)
Vy= Vp*sin(alpha)

En sachant que alpha vaut 90. en effet, on sait que 1 est la valeur maximum du sinus est forcement.
0=<alpha=<1
Si il y a une autre valeur que 90 ce sera forcement plus petit ou plus grand que 1.

t=d/v t= 30/Vy t=30/1.2*sin(90) t=30/1.2*1=25
Donc Paul mettre 25s pour traverser la rivière.

Vx= Vc+Vp*cos(90) Vx=0.5+0=0.5

On sait que d=v*t, donc d= 0.5*25=12.5

Paul mettra 25s a traverser la rivière, et arrivera 12,5m en aval de son point de départ.

Ce qui a été fait après

Il semble utile de revenir avec cette classe de première scientifique sur la compétence « Communiquer » citée à la page 3. En effet par manque de « sens critique d'une démarche ou d'un résultat », 5 élèves d'un même groupe n'ont pas précisé la longueur AB dans leur compte-rendu alors qu'ils avaient fait le plus difficile : le calcul du temps minimal de traversée. D'autre part, trop de comptes-rendus individuels démontrent la confusion entre les notions d'angles orientés de vecteurs et d'angles géométriques.
Enfin cette activité peut être prolongée par la question suivante : « Quelle est la courbe du nageur lorsque Paul se déplace toujours à une vitesse constante de 1,2 m/s mais en gardant cette fois-ci toujours en ligne de mire le point A (voir figure 2) ?» Ce sera l'occasion d'écrire un algorithme qui tracera une courbe du type « courbe de poursuite ».

4. LA PLACE DES OUTILS NUMERIQUES AU COURS DE CETTE ACTIVITE

Quels outils sont utilisés ? Pour quels apports ?

Le logiciel de géométrie dynamique aide l'élève à modéliser et à « visualiser » la situation. Il offre la possibilité de construire des vecteurs vitesses et leur somme, d'afficher le scalaire *temps de traversée* à partir de la formule *temps = distance/vitesse*. L'élève formule alors une conjecture et repère les « variables » dont dépend le problème.

Les élèves ont transmis leur compte-rendu individuel et le fichier *traverser.ggb* pour correction grâce à l'ENT Claroline. Les didacticiels des différents logiciels utilisés sont mis à disposition des élèves à tout moment sur l'ENT.

Quelles innovations sont dégagées de cette activité ?

Cette activité montre combien la phase de modélisation peut être difficile lorsque les élèves sont laissés en grande autonomie surtout lorsqu'elle « mélange » des connaissances « logicielles », mathématiques et de sciences physiques. Cette étape semble pourtant essentielle pour formuler une conjecture complexe et donner du sens à ce qui est fait. C'est donc un exemple d'activité concrète en lien avec d'autres disciplines dont une simulation à partir d'une modélisation logicielle fait émerger une stratégie de résolution.