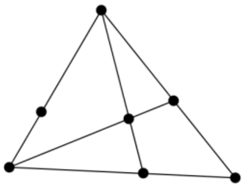
Olympiades de mathématiques 2014

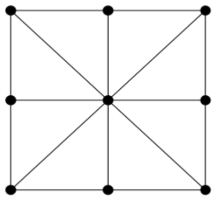
EUROPE – AFRIQUE – ASIE

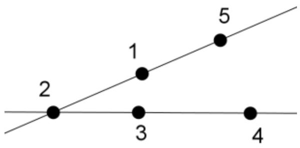
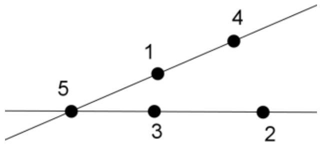
EXERCICE 1 : FIGURES EQUILIBRÉES

Éléments de correction

1. Voici un graphe équilibré ayant 7 points et 5 segments, puis un graphe équilibré ayant 9 points et 8 segments.





<table>
<tr>
<td>2. Exemple de numérotation non magique :

</td>
<td>Exemple de numérotation magique de constante 10 :

</td>
</tr>
</table>

On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants, par couples sur la même droite).

3.

a) Les quatre segments portent respectivement les sommes $a + c + e$, $a + b + f$, $b + d + e$, $c + d + f$. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à $4K$, et d'autre part : $2(a+b+c+d+e+f) = 2\times(1+2+3+4+5+6) = 42$. D'où l'égalité $4K = 42$.

b) L'égalité est impossible puisque K est un entier. Donc un tel graphe n'est pas magique.

4.

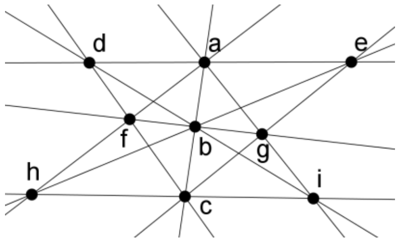
a) La somme $a + c + e$ est minimale lorsque $\{a, c, e\} = \{1, 2, 3\}$, et cette somme est maximale lorsque $\{a, c, e\} = \{4, 5, 6\}$. D'où $6 \le a+c+e \le 15$.

b) Si le graphe est magique, de constante K, on obtient :
$a + b + c = K$; $c + d + e = K$; $a + f + e = K$, d'où, en sommant membre à membre,
$(a + b + c + d + e + f) + (a + c + e) = 3K$.
Comme $a + b + c + d + e + f = 21$, on en déduite que $(a + c + e) = 3(K - 7)$.

c) On déduit de a) et b) que $6 \le 3(K-7) \le 15$, d'où $9 \le K \le 12$.
On vérifie que les quatre valeurs possibles de K donnent effectivement un graphe équilibré magique :

- avec $K=9$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
- avec $K=10$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
- avec $K=11$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 2, 4, 3, 5, 1 ;
- avec $K=12$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 3, 2, 5, 4, 1.

5. On numérote la figure ainsi :



Ces trois sommets a, b, c sont les seuls qui appartiennent à quatre segments, les autres appartenant à trois segments.
On a donc (en additionnant les 10 sommes égales à K) : $4(a+b+c)+3(d+e+f+g+h+i)=10K$.
On a donc $10K = 3 \times 45 + a + b + c = 135 + a + b + c$
Comme $1 + 2 + 3 \leq a + b + c \leq 7 + 8 + 9$, cad $6 \leq a + b + c \leq 24$, on trouve que la seule possibilité pour K est $K = 15$ (et $a + b + c = 15$).

Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre segments.
Puisque la constante est 15, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre segments ont pour somme 6. C'est impossible car il n'y a ni trois ni quatre façons d'obtenir une somme égale à 6, mais deux façons seulement : 6 = 1 + 5 = 2 + 4..

Conclusion : le graphe donné n'est pas magique.

Olympiades de mathématiques 2014

EUROPE – AFRIQUE – ASIE

EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

Éléments de correction

Partie A :

1. C'est **l'assistant n°3**. En effet :
La longueur du réseau routier de l'assistant n°1 mesure 300 km.
Celle de l'assistant n°2 mesure $200\sqrt{2} \approx 282{,}8$ km (la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$ qui se trouve avec le théorème de Pythagore).
Celle de l'assistant n°3 mesure $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi \approx 280{,}7$ km
ABE est rectangle en B donc $\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2 = 12\,500$ donc $\mathrm{AE} = \sqrt{12\,500} = 50\sqrt{5}$. Puisque FE est le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC] d'où $\mathrm{AF} = \mathrm{AE} - \mathrm{FE} = 50\sqrt{5} - 50$. D'autre part, le demi-cercle mesure $\frac{2\pi\times 50}{2} = 50\pi$. Ce qui donne une longueur totale de $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi$.

2. Oui, car il fait $20 + 4 \times \sqrt{50^2 + 40^2} = 20 + 40\sqrt{41} \approx 276{,}1$ km.

Partie B :

1. Comme admis au début de l'énoncé : si on trace une courbe quelconque entre deux points sa longueur est toujours au moins égale à celle du segment entre ces deux points.
Donc ici, le premier réseau dessiné par l'énoncé est de longueur supérieure ou égale à celui dessiné avec des segments, en remplaçant en outre les deux courbes entre E_0 et F_0 par un seul segment.

2. a. Notons A' le symétrique de A par rapport à Δ_E. La symétrie conserve les longueurs, on a : $\mathrm{DE}_0 + \mathrm{E}_0\mathrm{A} = \mathrm{DE}_0 + \mathrm{E}_0\mathrm{A}'$. D'après l'inégalité triangulaire rappelée au 1, cette somme est toujours supérieure ou égale à DA'. Et il y a égalité si, et seulement si, E_0 appartient au segment [DA']. Ainsi, $\mathrm{DE}_0 + \mathrm{E}_0\mathrm{A}$ sera minimale lorsque E_0 sera sur le segment [DA'] c'est-à-dire lorsque E_0 est sur la médiatrice de [DA], qu'on appellera médiatrice horizontale du carré.

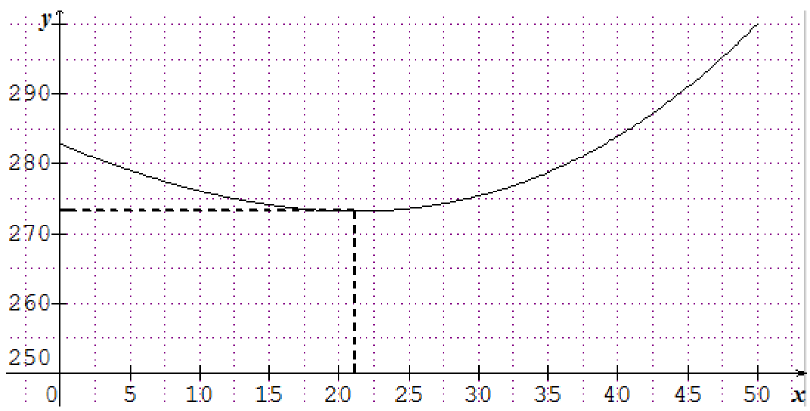
b. La distance minimale entre un point de Δ_E et un point de Δ_F est obtenue lorsque (EF) est perpendiculaire à Δ_E (et donc aussi à Δ_F). En effet, dans le cas contraire, notons G l'intersection de Δ_E et de la perpendiculaire à Δ_E passant par F. Le triangle EFG est alors rectangle en G donc son hypoténuse EF est supérieure à GF (théorème de Pythagore) ce qui ne donnerait pas une longueur minimale.

c. Les droites Δ_E et Δ_F étant fixées, pour tout réseau où E_0 est sur Δ_E et F_0 sur Δ_F, la longueur totale est $L + L' + L''$ où $L = DE_0 + E_0A$; L' est la distance entre les deux droites et $L'' = CF_0 + F_0B$.
Or d'après a, et b, il existe un réseau qui réalise le minimum de chacune de ces composantes, celui passant par E et F.
Conclusion (en considérant toutes les droites Δ_E et Δ_F possibles) : un réseau minimisant est bien de la forme de la figure.

3. a. On note O le point d'intersection de [EF] avec la médiatrice verticale (la médiatrice de [AB]).
Si E et F ne sont pas symétriques, on considère les longueurs DE+EA+EO d'un côté et CF+FB+FO
de l'autre. Si par exemple CF+FB+FO est plus grand ou égal à DE+EA+EO on remplace F par E' symétrique de E par rapport à O. On obtient alors une configuration symétrique de longueur inférieure ou égale.

b. Si on note $2x = EF$ où $x \in [0; 50]$ alors le réseau mesure

$f(x) =$
$2x + 4\sqrt{(50-x)^2 + 50^2}$.



Solution approchée : on représente cette fonction à l'aide de la calculatrice graphique et on essaie de chercher une valeur approchée du minimum :
On obtient un minimum d'environ 275 km atteinte en $x \approx 21$ d'où $EF \approx 42$ km.

Solution exacte (*utilisant des notions hors programme*):
Pour cela, on admet la propriété ci-dessous :
si u est fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
Ici, f est dérivable sur $[0; 50]$ et pour tout x de cet intervalle $f'(x) = 2 + \frac{4(x-50)}{\sqrt{(50-x)^2+50^2}}$.
Or $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 100x + 5\,000} \geq 2(50-x) \Leftrightarrow x^2 - 100x + 5\,000 \geq 4x^2 - 400x + 10\,000 \Leftrightarrow 3x^2 - 300x + 5\,000 \leq 0$
$\Delta = 30\,000$ les racines sont $x_1 = 50\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 50$ et $x_2 = 50\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 21{,}132$.

x	0		x_2		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$200\sqrt{2}$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	300

Pour $EF = x_2 = 100\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 42{,}264$ km, ce réseau est donc le plus petit, il mesure $f(x_2) = \cdots = 100\big(1 + \sqrt{3}\big) \approx 273{,}205$ km.

c. On peut d'abord chercher EAD :

tan(EAD) = $\frac{\frac{1}{2}(100 - EF_{min})}{50} \approx 0{,}577$ d'où EAD ≈ 30° et AED ≈ 120°.

Remarque : la valeur exacte de tan(EAD) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *: on a donc EAD = 30° et AED = 120°*

<u>Solution physique qui répond aux deux questions :</u> le réseau passe par A, D, O (le centre). On peut imaginer que les points sont placés sur une plaque percée en A, D, O et que l'on attache 3 fils en E. On fait passer les fils par les 3 trous et aux extrémités desquels on suspend des masses identiques. Le système prend une position d'équilibre. L'énergie potentielle doit être minimale, c'est-à-dire que la longueur des fils sous la plaque doit être la plus grande (la masse totale est la proche que la Terre !). Donc la longueur des fils au-dessus de la plaque est minimale. C'est donc la solution de notre problème. On fait le bilan des forces au point M. La somme des tensions (qui sont identiques en intensité) est nulle. Donc on a la somme de 3 vecteurs de même longueur qui est nulle. Cela n'est possible que si les angles valent 120^{o}. En effet si l'un des trois angles est inférieur à 120^{o}, la longueur du troisième vecteur qui est l'opposé de la somme (à l'intensité près) serait inférieure à $2\cos(60^{o}) = 1$.

Exercice 3. **Série S - des points dans le disque**

1/ a) Par lecture graphique $f(1) = 9$ et $f(2) = 25$.

b) Le nombre de points situés sur le côté du carré est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1 donc pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $f(r) = (2r+1)^2$

2/ a) $g(1) = 5$ et $g(2) = 13$.

b) On a $f(1) = g(1) + 4 \times 1$, $f(2) = g(2) + 4 \times (1+2)$ et ainsi de suite.

On généralise : $f(r) = g(r) + 4 \times (1 + 2 + \ldots + r)$ donc $g(r) = (2r+1)^2 - 4 \times \dfrac{r(r+1)}{2}$.

Finalement, $g(r) = 4r^2 + 4r + 1 - 2r^2 - 2r = 2r^2 + 2r + 1$.

3/ a) $h(1) = 5$ et $h(2) = 13$.

b) Oui, par exemple pour $r = 5$, il y a 12 points à coordonnées entières sur le cercle : les points de coordonnées $(0,0)$, $(4,3)$, $(3,4)$ et $(0,5)$ ainsi que leurs symétriques par rapport aux axes et à l'origine du repère.

4/ Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $g(r) \leqslant h(r) \leqslant f(r)$ qui est l'inégalité demandée. En effet, le carré $PQRS$ est contenu dans le disque lui-même contenu dans le carré $ABCD$.

5/ a) Un algorithme possible :

```
Variables :          i, j, r et s sont des entiers
Initialisations :    Affecter à s la valeur 0.
Traitement :         Lire la valeur de r
                     Pour i allant de −r à r
                         Pour j allant de −r à r
                             Si i² + j² ⩽ r²
                                 Affecter à s la valeur s + 1
                             Fin si
                         Fin pour
                     Fin pour
Sortie :             Afficher s
```

b) On peut conjecturer que ce quotient tend vers π.

Exercice 4. **Série S - les nombres k-gonaux**

1/ a) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 12$ et $p_4 = 22$.

b) Pour passer de l'étape $n-1$ à l'étape n, on ajoute $(n-1)$ points blancs sur 3 côtés du grand trapèze ainsi qu'un point de plus, ce qui fait $3(n-1)+1 = 3n-2$ points de plus. Ainsi :

$$p_n = p_{n-1} + 3n - 2.$$

c) D'après la question précédente, $p_n - p_{n-1} = 3n - 2$ donc :

$$p_2 - p_1 = 3 \times 2 - 2 \qquad p_3 - p_2 = 3 \times 3 - 2 \qquad \ldots \qquad p_n - p_{n-1} = 3 \times n - 2$$

On déduit par addition :

$$(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) = 3(2 + 3 + \ldots + n) - \underbrace{(2 + 2 + \ldots + 2)}_{(n-1)\text{ fois}}$$

qui est l'égalité demandée.

On déduit $p_n - p_1 = 3\left[\dfrac{n(n+1)}{2} - 1\right] - 2(n-1)$ soit $p_n = \dfrac{3n^2 + 3n - 6 - 4n + 4}{2} + 1 = \dfrac{3n^2 - n}{2}$.

d) L'équation $p_n = 2014$ est équivalente à $3n^2 - n - 4028 = 0$ qui n'a pas de solution entière.

Donc 2014 n'est pas un nombre pentagonal.

2/ a) Pour passer de l'étape $(n-1)$ à l'étape n, on ajoute $(n-1)$ points blancs sur $(c-2)$ côtés du grand polygone ainsi qu'un point de plus, ce qui fait $(n-1)(c-2)+1$ points de plus. Ainsi :

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)(c-2) + 1.$$

b) De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}(u_2 - u1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) &= [1 + 2 + \ldots + (n-1)](c-2) + \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{(n-1)\text{ fois}} \\ &= \frac{n(n-1)(c-2)}{2} + (n-1)\end{aligned}$$

c) L'équation $2014 = \dfrac{335n^2 - 333n}{2}$ est équivalente à $335n^2 - 333n - 4028 = 0$ qui admet $n = 4$ comme solution positive donc 2014 est bien un nombre $337-$gonal.