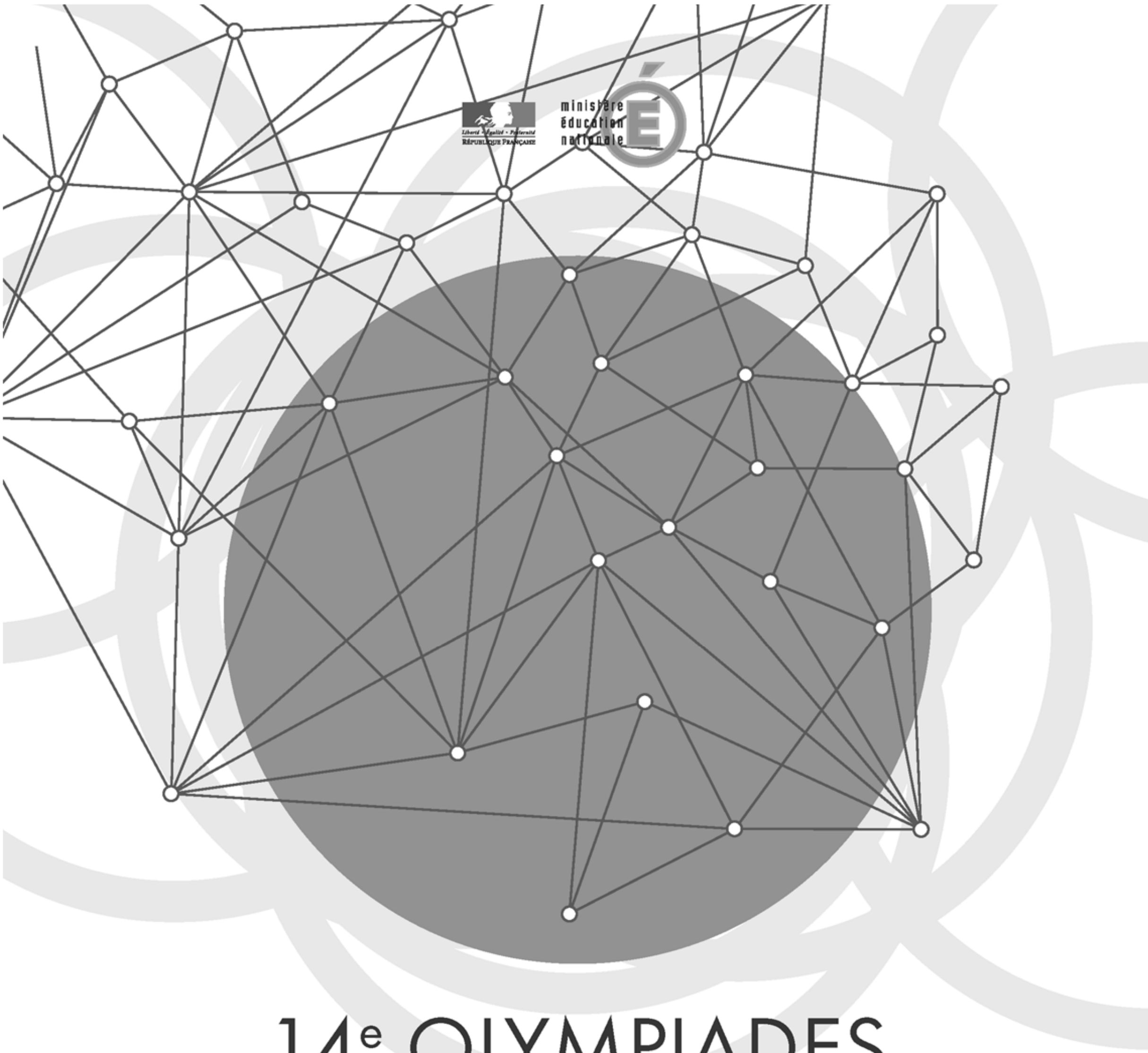


# 14e OLYMPIADES de mathématiques 19 mars 2014

**Séries ES/L/STI/STMG**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

***Le candidat doit traiter les quatre exercices.***

***Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***

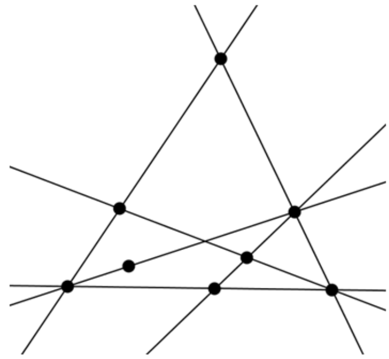
***Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

# EXERCICE 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).

Elle possède la propriété suivante :

*Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.*



Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

**1.** Construire une figure équilibrée constituée :

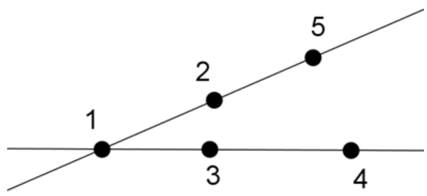
a) de 7 points marqués et 5 droites ;

b) de 9 points marqués et 8 droites.

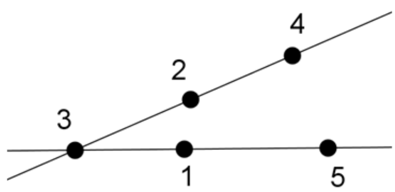
Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant $p$ points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à $p$.

Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier $K$, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à $K$. Cet entier $K$ est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

**2.** Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :




$K = 8$

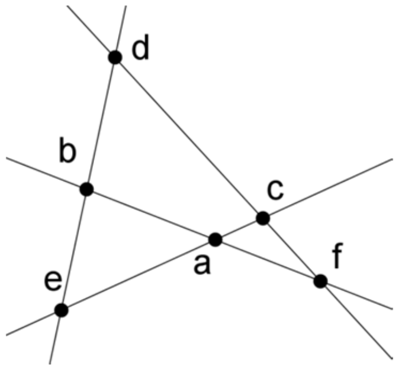



$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.

Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

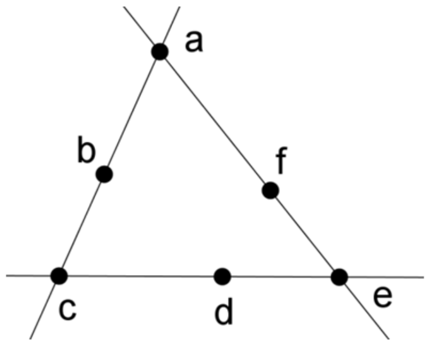
**3.** La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés *a, b, c, d, e, f* sur la figure.




a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique $K$, alors $4 \times K = 42$.

b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

**4.** La figure équilibrée ci-contre est constitué de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau *a, b, c, d, e, f* sur la figure.

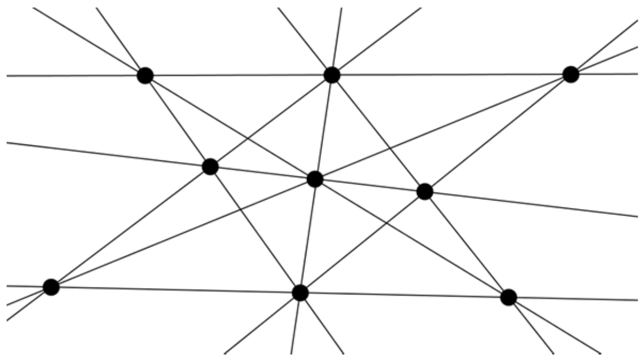



a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante $K$, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

**5.** La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



# EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

## Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

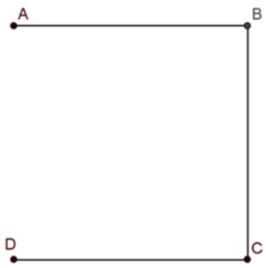



*fig. 1*

Assistant n°1

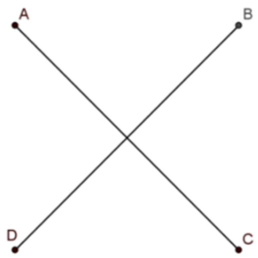



*fig. 2*

Assistant n°2

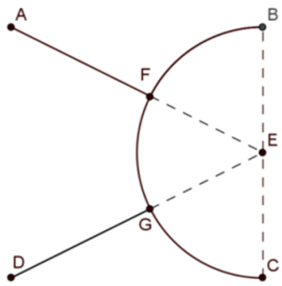



*fig. 3*

Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

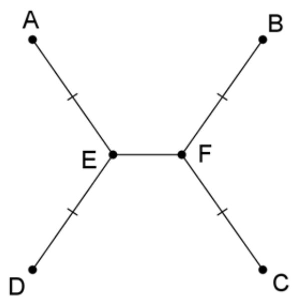



*fig. 4*

## Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

*Rappels de géométrie :*

*Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :*

*on a toujours* $AB + BC \geqslant AC$ *;*

*on a l'égalité* $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

*On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).*

**1.** Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de côté, comme dans le dessin suivant.

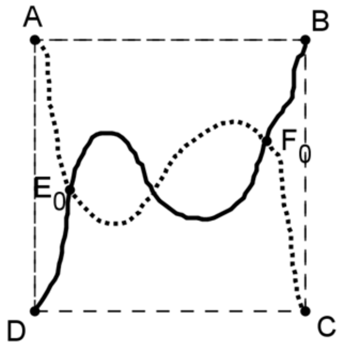



*fig. 5*

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle $E_0$ le premier point d'intersection rencontré et $F_0$ le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

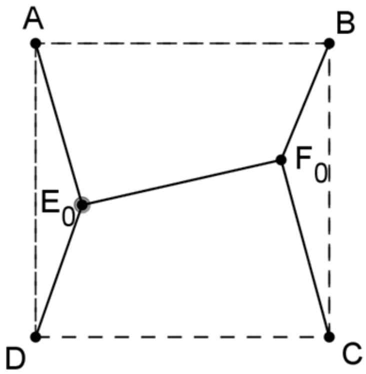



*fig. 6*

**2.** On considère les droites $\Delta_E$ et $\Delta_F$, parallèles à (AD) passant par $E_0$ et $F_0$ (voir figure 7 ci-dessous).

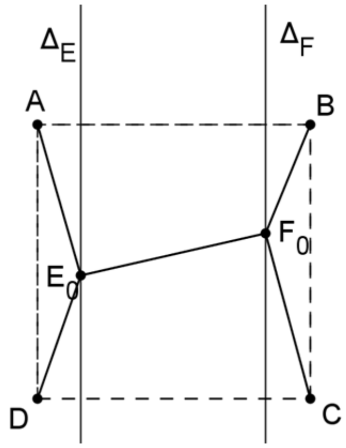



*fig. 7*

a) Déterminer le point E de $\Delta_E$ tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour $F_0$.

b) Montrer que $EF \leqslant E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

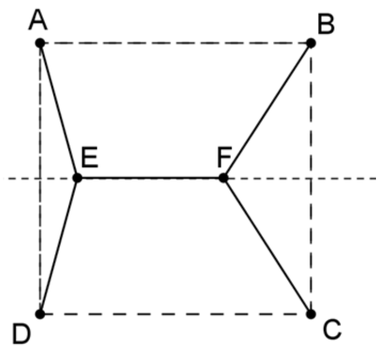



*fig. 8*

**3.** On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c) Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

# EXERCICE 3 : LES NOMBRES DE FIBONACCI

La suite de nombres de Fibonacci est une suite d'entiers naturels qui commence par les termes 1 et 1 et dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent.

On note $F_1 = 1$ puis $F_2 = 1$ les deux premiers termes de cette suite.

On déduit $F_3 = F_1 + F_2 = 2$ puis $F_4 = F_2 + F_3 = 3$, etc.

**1.** Calculer $F_{10}$.

**2.** On utilise un tableur pour calculer automatiquement les premiers termes de cette suite :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 | 987 | 1597 |

Dans les cellules A1 à Q1 on a représenté les entiers consécutifs de 1 à 17.
Dans les cellules A2 à Q2 on a représenté les premiers nombres de la suite de Fibonacci.

a) Quelle formule a été saisie dans la cellule C2 puis recopiée de D2 à Q2 ?

b) 2014 est-il un nombre de la suite de Fibonacci ? Justifier la réponse.

**3.** On souhaite connaître la valeur du nombre $s = F_1 + F_3 + \dots F_{2013}$, somme des premiers nombres de la suite de Fibonacci d'indice impair (de 1 à 2013).

a) Vérifier que $F_1 + F_3 = F_4$ puis que $F_1 + F_3 + F_5 = F_6$.

En déduire que le nombre *s* est un nombre de la suite de Fibonacci.

Préciser lequel en justifiant la réponse.

b) On souhaite écrire un algorithme qui calcule ce nombre *s*.

Quelles variables mettre à la place des trois zones en pointillés de l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il demande à l'utilisateur un entier naturel $n \geqslant 3$ puis qu'il calcule et affiche le nombre $F_n$ correspondant ?

```
Variables :        n,A,B,C et i sont cinq entiers
                   naturels
Initialisation :   Affecter à A la valeur 1
                   Affecter à B la valeur 1
Traitement :       Lire n
                   Pour i variant de 3 à n
                     | Affecter à C la valeur A+B
                     | Affecter à A la valeur ...
                     | Affecter à B la valeur ...
Sortie :           Afficher ...
```

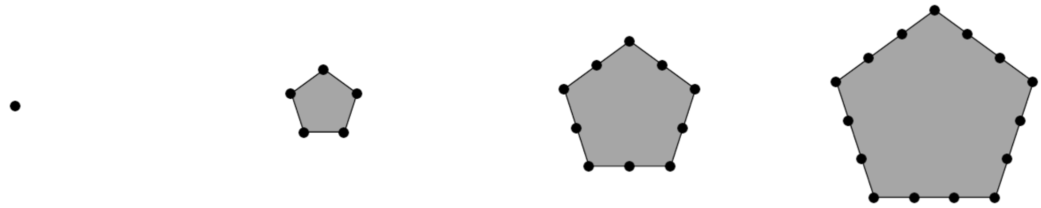
*On recopiera et on complètera cet algorithme sur la feuille de copie.*

c) Quelle valeur donner à $n$ pour que l'algorithme affiche le nombre $s$ ?

**4.** Le théorème d'Édouard Zeckendorf (mathématicien belge, 1901-1983) affirme que tout entier positif s'écrit comme somme de nombres de Fibonacci, **distincts** et **non consécutifs**.
Vérifier ce théorème avec le nombre 2014.

# EXERCICE 4 : LES NOMBRES PENTAGONAUX

**1.** On construit une succession de pentagones $p_1$ , $p_2$ , …, $p_n$ comme ci-dessous.



$p_1$ $p_2$ $p_3$ $p_4$

Sur chaque côté du pentagone, il y a un point de plus qu'à l'étape précédente.

Le nombre de points de chaque figure est appelé « nombre olympique ».

On note $u_n$ le *n*-ième nombre olympique.

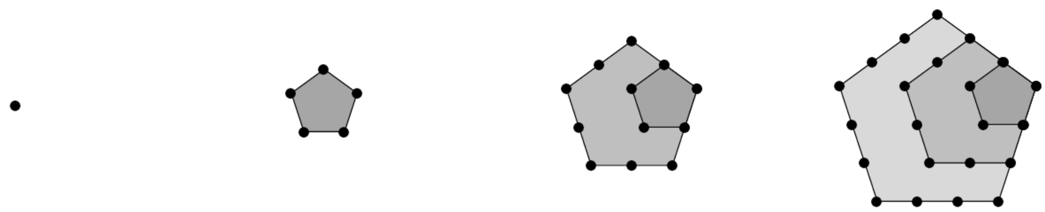
a) Donner les valeurs de $u_1$, $u_2$, $u_3$ et vérifier que $u_4 = 15$.

b) Soit *n* un entier plus grand que 2.

Trouver une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$ puis donner l'expression de $u_n$ en fonction de *n*.

c) 2014 est-il un nombre olympique ?

**2.** On construit cette fois-ci une succession de pentagones emboîtés $P_1, P_2$, …, $P_n$ comme ci-dessous.



$P_1$ $P_2$ $P_3$ $P_4$

Le nombre de points de chaque figure est appelé « nombre pentagonal ».

On note $v_n$ le *n*-ième nombre pentagonal.

a) Donner les valeurs de $v_1$, $v_2$ et $v_3$ puis vérifier que $v_4 = 22$.

b) On admet que pour tout entier *n* plus grand que 2 on a : $v_n = v_{n-1} + 3n - 2$.

À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de $v_7$ et $v_{36}$.

c) Augustin Louis Cauchy (mathématicien français, 1789-1857) a démontré que tout nombre entier non nul est au plus la somme de cinq nombres pentagonaux.
Vérifier que 2014 s'écrit bien comme somme d'au plus cinq nombres pentagonaux.

d) Écrire un algorithme qui calcule et affiche le 2014$^{e}$ nombre pentagonal.