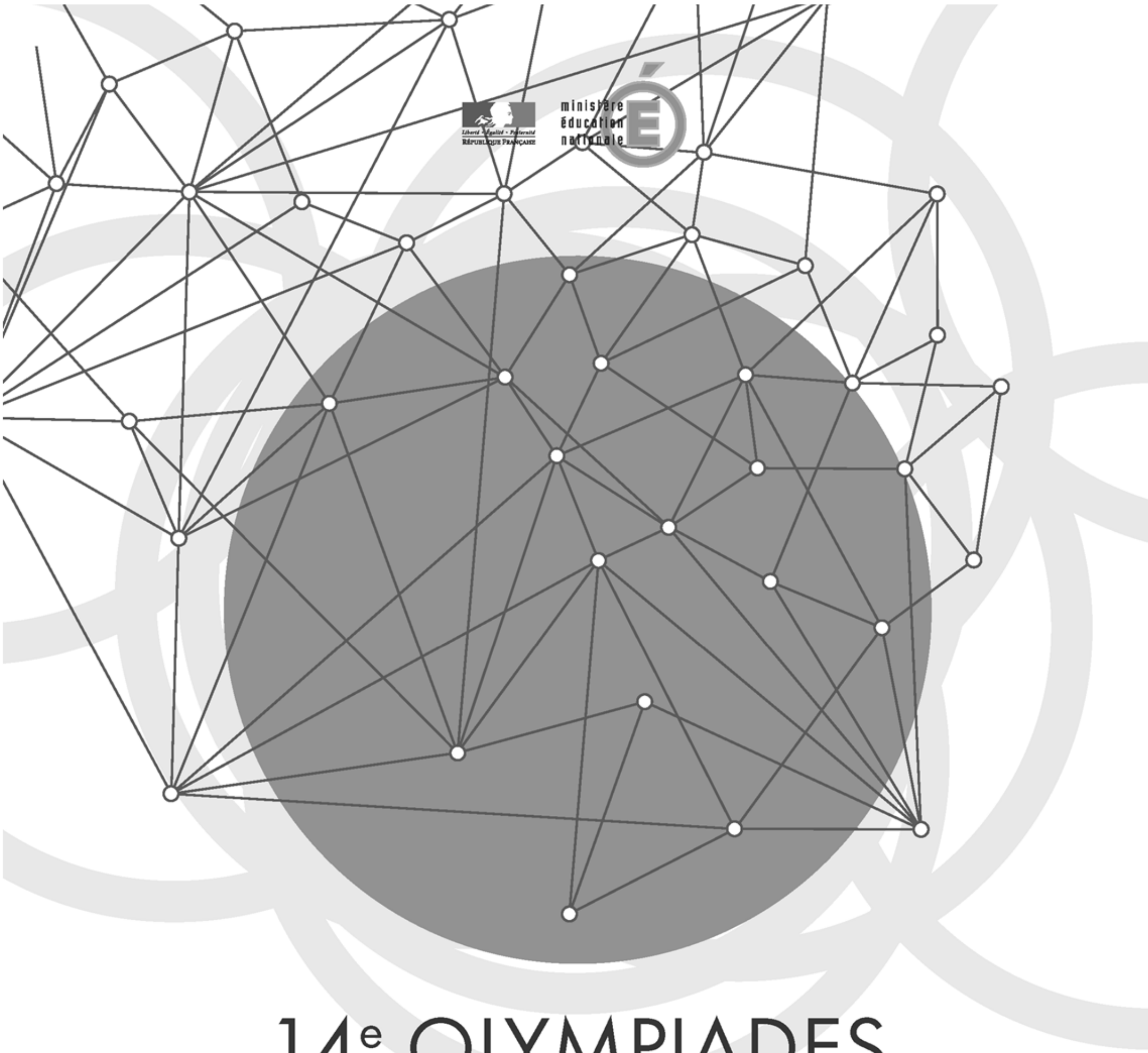


14e OLYMPIADES de mathématiques 19 mars 2014

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

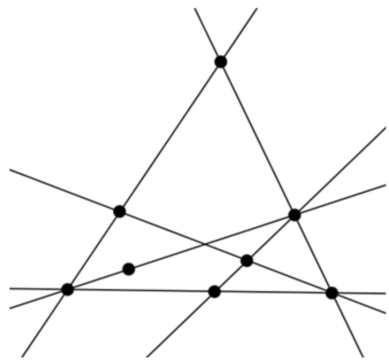
EXERCICE 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).

Elle possède la propriété suivante :

Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



1. Construire une figure équilibrée constituée :

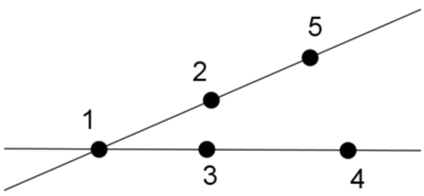
a) de 7 points marqués et 5 droites ;

b) de 9 points marqués et 8 droites.

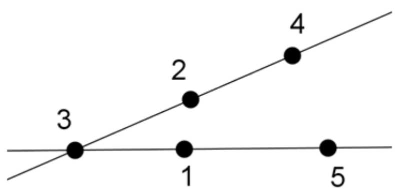
Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.

Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



$K = 8$

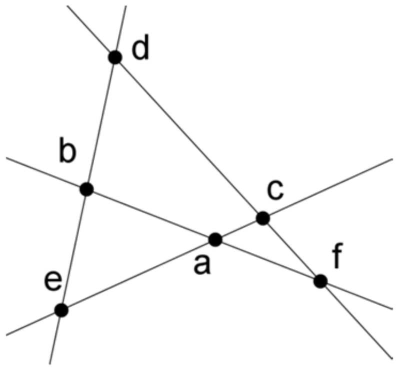


$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.

Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés *a, b, c, d, e, f* sur la figure.

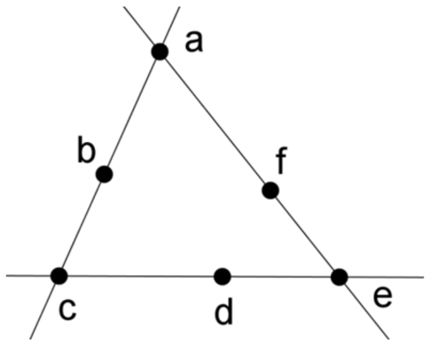


a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.

b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?

Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constitué de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau *a, b, c, d, e, f* sur la figure.



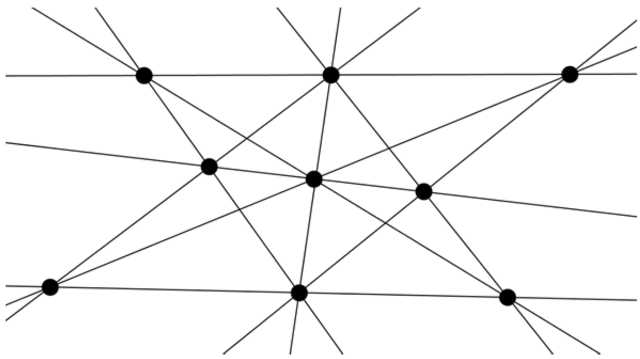
a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.

Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

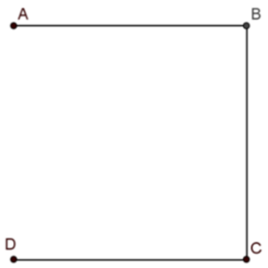


fig. 1

Assistant n°1

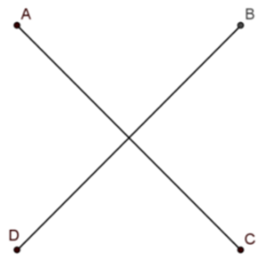


fig. 2

Assistant n°2

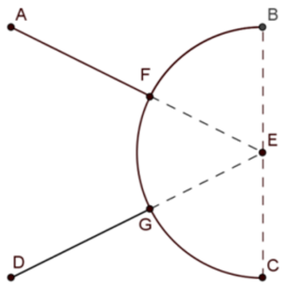


fig. 3

Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

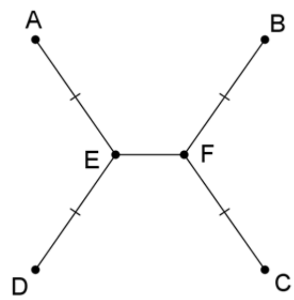


fig. 4

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geqslant AC$ *;*

on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

3. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de côté, comme dans le dessin suivant.

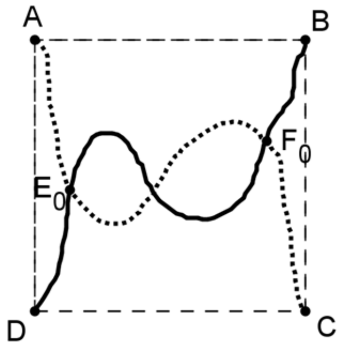


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

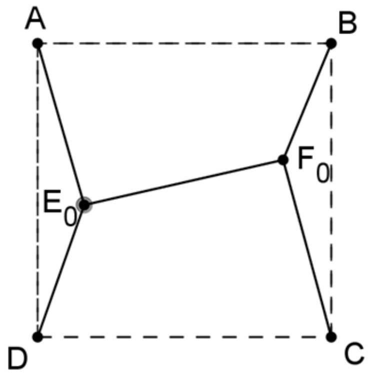


fig. 6

4. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

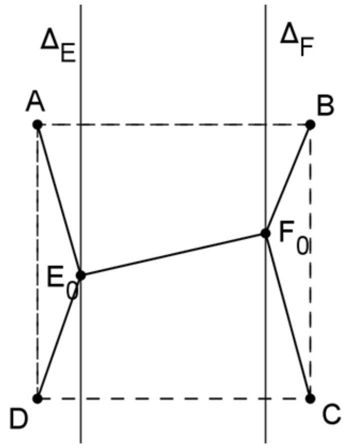


fig. 7

a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
   On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b) Montrer que $EF \leqslant E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

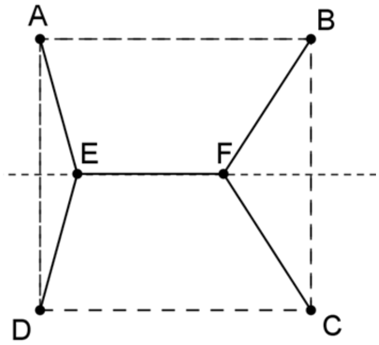


fig. 8

5. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
   Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

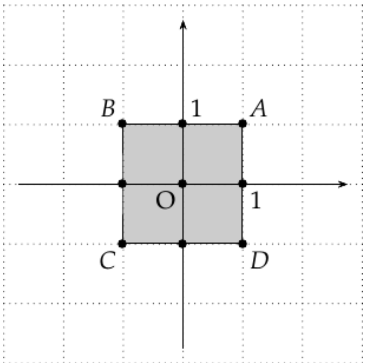
c) Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

EXERCICE 3 : DES POINTS DANS UN DISQUE

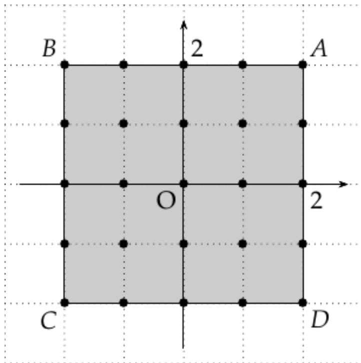
Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. Dans cet exercice on dit que, dans le repère, un point $M(x;y)$ est à coordonnées entières lorsque chacune de ses coordonnées x **et** y sont des nombres entiers relatifs (donc positifs ou négatifs).

1. Pour tout nombre entier naturel non nul r, on considère $A(r;r)$, $B(-r;r)$, $C(-r;-r)$ et $D(r;-r)$.

On a représenté ci-dessous le carré $ABCD$ pour $r=1$ et $r=2$:



$r=1$



$r=2$

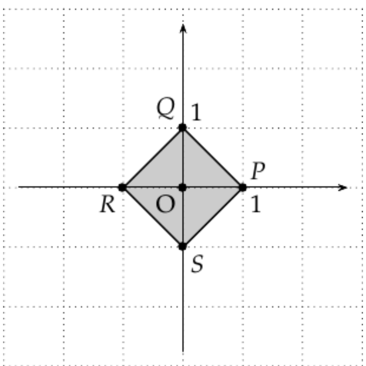
Pour tout entier naturel non nul r, on note $f(r)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le carré $ABCD$ (contour compris).

a) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f(2)$.

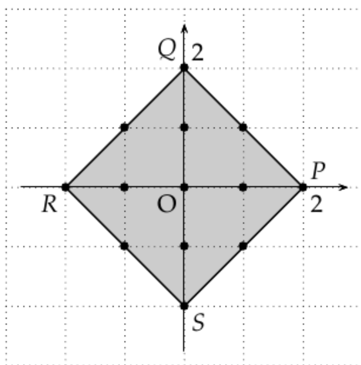
b) Déterminer l'expression de $f(r)$ en fonction de r. Justifier la démarche.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul r, on note $P(r;0)$, $Q(0;r)$, $R(-r;0)$ et $S(0;-r)$.

On a représenté ci-dessous le quadrilatère $PQRS$ pour $r=1$ et $r=2$:



$r=1$



$r=2$

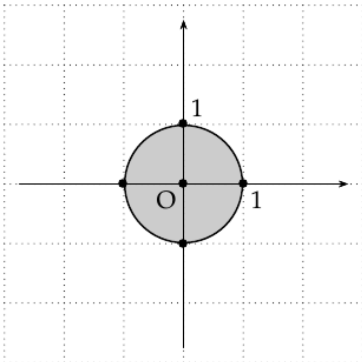
Pour tout entier naturel non nul *r*, on note $g(r)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le quadrilatère *PQRS* (contour compris).

a) Par lecture graphique, déterminer $g(1)$ et $g(2)$.

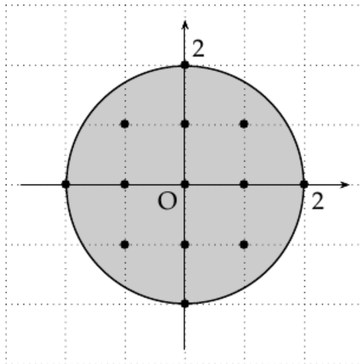
b) Déterminer l'expression de $g(r)$ en fonction de *r*. Justifier la démarche.

Indication : on pourra comparer $g(r)$ *à* $f(r)$.

3. On a représenté ci-dessous le disque de centre O et de rayon *r* pour $r=1$ et $r=2$:



$r=1$



$r=2$

Pour tout nombre réel positif *r*, on note $h(r)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le disque de centre O et de rayon *r* (contour compris).

a) Par lecture graphique, déterminer $h(1)$ et $h(2)$.

b) Existe-t-il des valeurs de *r* pour lesquelles le nombre de points qui appartiennent au **cercle** de centre O et de rayon *r* est strictement supérieur à 4 ?

4. À l'aide de considérations géométriques, justifier que pour nombre entier *r* non nul :

$$2r^2+2r+1 \leqslant h(r) \leqslant 4r^2+4r+1$$

5. On rappelle qu'un point $M(x,y)$ appartient au disque (contour compris) de centre *A* et de rayon *R* si, et seulement si, $AM^2 \leqslant R^2$.

a) Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur le nombre *r* et qui calcule et affiche $h(r)$.

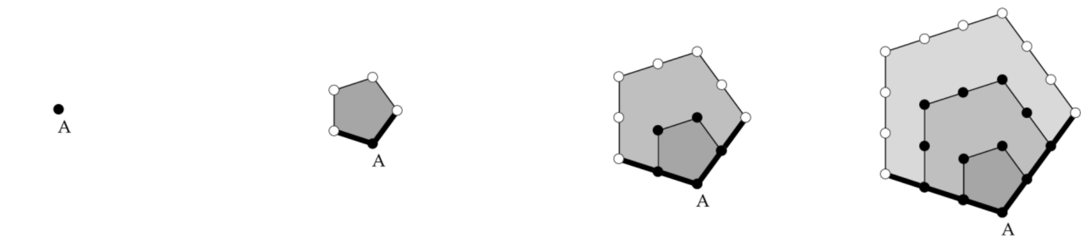
b) On donne ci-dessous quelques valeurs de $h(r)$ retournées par l'algorithme :

r	100	500	1000
$h(r)$	31417	785349	3141549

Que peut-on conjecturer sur la limite du nombre $\dfrac{h(r)}{r^2}$ lorsque *r* devient « grand » ?

EXERCICE 4 : LES NOMBRES K-GONAUX

1. On construit une succession de pentagones emboîtés comme ci-dessous :



Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

Pour obtenir la figure à l'étape n $(n \geq 2)$:

- À partir du plus grand pentagone de l'étape $(n-1)$, on prolonge d'un point les deux côtés adjacents au point A (côtés en gras dans les exemples).
- On complète alors la figure par des points pour obtenir le pentagone qui contient la figure de l'étape $(n-1)$ (points blancs dans les exemples)

Le nombre **total** de points (blancs et noirs) de la figure obtenue à l'étape n est appelé « n-ième nombre pentagonal » et on le note p_n.

a) Donner les valeurs de p_1, p_2, p_3 et vérifier que $p_4 = 22$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a : $p_n = p_{n-1} + 3n - 2$.

c) Démontrer alors que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) = 3(2 + \ldots + n) - 2(n-1)$$

puis en déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

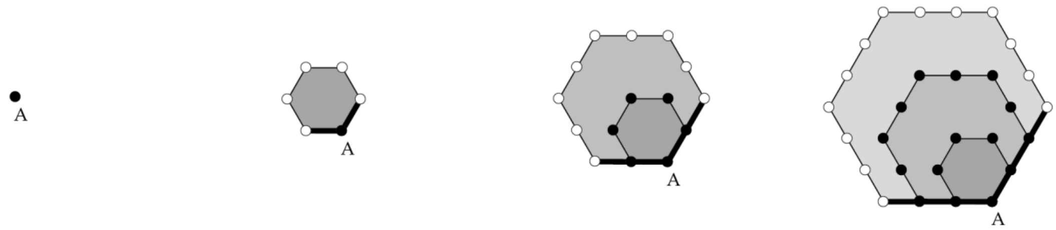
Indication : pour tout entier naturel n non nul on a : $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

d) 2014 est-il un nombre pentagonal ? Justifier la réponse.

2. On généralise le processus précédent en construisant une succession de polygones réguliers emboités ayant *c* côtés (où le nombre *c* est un entier naturel supérieur ou égal à 3).

Le nombre total de points de chaque figure est noté u_n et il est appelé « nombre c-gonal »

Par exemple, la figure ci-dessous représente une succession d'hexagones ($c = 6$).
Le nombre total de points de chaque figure est le nombre « 6-gonal ».



$u_1 = 1$ $\quad$ $u_2 = 6$ $\quad$ $u_3 = 15$ $\quad$ $u_4 = 28$

On se place désormais dans le cas général et on suppose que le nombre c est un nombre entier naturel quelconque supérieur ou égal à 3.

a) Pour tout entier naturel n non nul, trouver une relation entre u_n et u_{n-1}.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{n(c-2)(n-1)}{2} + (n-1)$$

c) On admet que l'on déduit de cette égalité l'expression :

$$u_n = \frac{n^2(c-2) - n(c-4)}{2}$$

Vérifier que 2014 est un nombre 337-gonal.