MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Corrigé de l'exercice 4 sujet S

Le marathon des Points

A) 1) $\overrightarrow{u_1}\binom{0}{1}$; $\overrightarrow{u_2}\binom{-2}{0}$; $\overrightarrow{u_3}\binom{0}{-3}$; $\overrightarrow{u_4}\binom{4}{0}$; $\overrightarrow{u_5}\binom{0}{5}$; $\overrightarrow{u_6}\binom{-6}{0}$; $\overrightarrow{u_7}\binom{0}{-7}$; $\overrightarrow{u_8}\binom{8}{0}$. Ainsi, on distingue 4 groupes de vecteurs colinéaires de même sens : $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_5}$ puis $\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_6}$, puis $\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_7}$ et enfin $\overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_8}$.

2) a) $\frac{n}{2}$ entier pour n pair et $\frac{n-1}{2}$ entier pour n impair.

b) Pour n pair : $(-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 4 \\ -1 & \text{si } n-2 \text{ est un multiple de } 4 \end{cases}$.

Pour n impair : $(-1)^{\frac{n-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n-1 \text{ est un multiple de } 4 \\ -1 & \text{si } (n-1)-2 \text{ est un multiple de } 4, \text{ ie si } n-3 \text{ est un multiple de } 4 \end{cases}$

Ainsi, au vu des alternances constatées dans les coordonnées des vecteurs correspondant aux déplacements successifs, on peut déduire que :

$\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$ **a pour coordonnées** $\boxed{\begin{pmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}} n \\ 0 \end{pmatrix} \textbf{ lorsque } n \textbf{ est pair}}$ et $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \end{pmatrix} \textbf{ lorsque } n \textbf{ est impair}}$.

c) 400 est pair, donc $\overrightarrow{u_{400}} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{400}{2}} 400 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

715 est impair donc $\overrightarrow{u_{715}} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{\frac{715-1}{2}} 715 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -715 \end{pmatrix}}$.

3)

```
TRAITEMENT
Si Reste(n,2)=0 alors
    x_u prend la valeur (-1)^(n/2) n
    y_u prend la valeur 0
Sinon
    x_u prend la valeur 0
    y_u prend la valeur (-1)^((n-1)/2) n
FinSi
```

B) 1) a) Il semble que tous les points M_n qui se trouvent sur D aient un indice multiple de 4, donc de la forme $4k$, avec k entier strictement positif.

$\boxed{\overrightarrow{M_4M_8}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$

b) $\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{r}{2}} r \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}}$ car r est un multiple de 4, donc pair et tel que $\frac{r}{2}$ est encore pair.

De même, comme $r+2$ est encore pair,

$\overrightarrow{\boldsymbol{u_{r+2}}}\begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r+2}{2}}(r+2)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r}{2}+1}(r+2)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r}{2}}(-1)(r+2)\\0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-r-2\\0\end{pmatrix}}$

Par ailleurs, $\underline{r+1 \text{ étant impair}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u_{r+1}}}\begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{(r+1)-1}{2}}(r+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{r}{2}}(r+1)\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\r+1\end{pmatrix}}$

De même, $\overrightarrow{\boldsymbol{u_{r+3}}}\begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{(r+3)-1}{2}}(r+3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{r+2}{2}}(r+3)\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\-r-3\end{pmatrix}}$.

c) $\overrightarrow{M_rM_s} = \overrightarrow{M_rM_{r+4}} = \overrightarrow{M_rM_{r+1}} + \overrightarrow{M_{r+1}M_{r+2}} + \overrightarrow{M_{r+2}M_{r+3}} + \overrightarrow{M_{r+3}M_{r+4}} = \overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_{r+1}} + \overrightarrow{u_{r+2}} + \overrightarrow{u_{r+3}}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{M_rM_s}\begin{pmatrix}r+0+(-r-2)+0\\0+r+1+0+(-r-3)\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}}$.

On a donc bien $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{M_rM_s}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M_4M_8}}}$ pour tous r et s multiples consécutifs de 4 .

d) $\overrightarrow{M_4M_{12}} = \overrightarrow{M_4M_8} + \overrightarrow{M_8M_{12}} = 2\overrightarrow{M_4M_8}$ d'après la question précédente, et donc $\boxed{\overrightarrow{M_4M_{12}}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}}$

Avec le même raisonnement, $\overrightarrow{M_4M_{40}} = 9\overrightarrow{M_4M_8}$ donc $\boxed{\overrightarrow{M_4M_{40}}\begin{pmatrix}-18\\-18\end{pmatrix}}$.

Et encore avec le même raisonnement : $\overrightarrow{M_4M_{4k}} = \overrightarrow{M_4M_8} + \overrightarrow{M_8M_{12}} + \cdots + \overrightarrow{M_{4k-4}M_{4k}} = \boxed{(\boldsymbol{k-1})\overrightarrow{\boldsymbol{M_4M_8}}}$ et a donc pour coordonnées $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{M_4M_{4k}}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{-2(k-1)}\\\boldsymbol{-2(k-1)}\end{pmatrix}}$.

e) D'après la question précédente, $\overrightarrow{M_4M_{4k}}$ (pour k entier strictement positif) est colinéaire à $\overrightarrow{M_4M_8}$ et de même sens, et donc **tous les points $\boldsymbol{M_{4k}}$ appartiennent à $\boldsymbol{D}$**: $y = x$ (pour $x \leq -2$) , et ce n'est pas le cas des points M_{4k-1} , M_{4k-2}, et M_{4k-3} puisqu'ils n'ont pas leur abscisse et leur ordonnée égales et strictement négatives. **<u>Bilan : Les</u> <u>points $\boldsymbol{M_n}$ de $\boldsymbol{D}$ ont un indice multiple strictement positif de 4</u>**.

Si n est un multiple strictement positif de 4, c'est-à-dire de la forme $n = 4k$ avec $k > 0$, alors comme on a vu que $\overrightarrow{M_4M_{4k}}\begin{pmatrix}-2(k-1)\\-2(k-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2k+2\\-2k+2\end{pmatrix}$, on déduit que $\overrightarrow{M_4M_n}\begin{pmatrix}-\frac{n}{2}+2\\-\frac{n}{2}+2\end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{M_4M_n}\begin{pmatrix}x_{M_n} - x_{M_4}\\y_{M_n} - y_{M_4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{M_n}+2\\y_{M_n}+2\end{pmatrix}$. Par conséquent, on trouve bien $\boxed{M_n\left(-\frac{n}{2}; -\frac{n}{2}\right)}$.

f) $M_n\left(-\frac{n}{2}; -\frac{n}{2}\right)$ donc $OM_n = \sqrt{\left(-\frac{n}{2}\right)^2 + \left(-\frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \times \frac{n^2}{4}} = \frac{n}{\sqrt{2}}$ (puisque $n > 0$) $= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{n}}$.

2) Comme B se déplace sur la droite D, on ne considèrera que des entiers **$\boldsymbol{n}$ multiples de 4 strictement positifs.** Soit n un entier multiple de 4.

Calcul de la distance $\boldsymbol{d_{n,A}}$ parcourue par le point A jusqu'au point M_n : $d_{n,A} = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_{n-1}M_n$ soit $d_{n,A} = 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Or, $d_{n,B} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}n}$. Donc on cherche le plus petit n multiple de 4 tel que $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{15\sqrt{2}}{2}n$, soit $n(n-1) \geq 15\sqrt{2}n$, soit $n - 1 \geq 15\sqrt{2}$, puisque $n > 0$, et donc finalement $n \geq 15\sqrt{2} + 1 \approx 22{,}21$. Ainsi, $d_{n,A}$ sera supérieure à au moins 15 fois $d_{n,B}$ $\boxed{\textbf{à partir de } \boldsymbol{n = 24} \textbf{ .}}$