Olympiades académiques de mathématiques

Corrigé de l'exercice 3
Toutes séries.

Olympiades de Mathématiques 2015 CORRIGE

Préliminaire :

1) On peut former 2^n mots de *n* chiffres (2 choix pour chaque chiffre).
2) Considérons un mot de 4 chiffres :
- S'il commence par 0 : sans carré , le suit forcément un 1 , puis ensuite un 0.
Si le 4° chiffre est 1 , le mot comporte le carré 01.
Si le 4° chiffre est 0 , le mot comporte le carré 00.
- Raisonnement identique s'il commence par 1.

Donc un carré est inévitable.

A) Une transformation : P(11) = (10)(10) = 1010
P(100) = (10)(01)(01) = 100101

B) La suite de Protéus :

1) t_2 = P(t_1) = P(01) = (01)(10) = 0110 ; t_3 = P(t_2) = P(0110) = 01101001

2) t_0 comporte 1 chiffre , t_1 comporte 2 chiffres , t_2 comporte 4 chiffres , t_3 comporte 8 chiffres.

t_n semble comporter 2^n chiffres. En effet, à chaque étape, on double le nombre de chiffres car on remplace un chiffre par deux.

3) Dans t_2, il y a autant de 1 que de 0 et cette propriété est héréditaire puisque à chaque étape, chaque 1 « produit » un 0 et chaque 0 « produit » un 1

C) Le miroir :

1) P($\bar{0}$) = P(1) = 10 = $\overline{P(0)}$

P($\bar{1}$) = P(0) = 01 = $\overline{P(1)}$ on en déduit l'égalité de $P\left(\overline{m}\right)$ et $\overline{P(m)}$.

2) a) t_1 = 01 ; t_2 = 0110 ; t_3 = 01101001 ; observe que $t_2 = t_1\overline{t_1}$ et $t_3 = t_2\overline{t_2}$

b) Si un mot est sous la forme $m\overline{m}$, alors $P\left(m\overline{m}\right)=P(m)P(\overline{m})=P(m)\overline{P(m)}$ et donc la propriété est héréditaire, autrement dit $t_{n+1}=t_n\overline{t_n}$ pour tout entier n > 0

c) On peut remarquer qu'un mot de la forme $m\overline{m}$ possède autant de 0 et de 1.

d) Les deux derniers chiffres du mot t_{2015} sont 01

D) Enigme 1 :

Nombre en base 10	0	1	2	3	4	5	6	7
N = Nombre en base 2	0	1	10	11	100	101	110	111
S = Somme des chiffres de N	0	1	1	2	1	2	2	3
Reste de la division euclidienne de S par 2	0	1	1	0	1	0	0	1

t_3 apparaît sur la dernière ligne.

E) Enigme 2 :

1) $E=\{1;4;6;7\}$ et $F=\{2;3;5;8\}$

2) Dans t_3 , *E* correspond aux positions du chiffre 0 et *F* à celles de 1.