MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Corrigé de l'exercice 4 sujet non S

Sera-t-il ruiné ?

Partie A

1) Le joueur peut effectuer au maximum 3 lancers pour avoir la garantie de ne pas être ruiné (les 4 lancers $PPPP$ mènent à la ruine).

2)

a) Il y a 2^3 issues et les sommes correspondantes sont les suivantes :

- $PPP: 4-3=1$
- $PPF: 4-2+1=3$
- $PFP: 4-2+1=3$
- $PFF: 4-1+2=5$
- $FPP: 4-2+1=3$
- $FPF: 4-1+2=5$
- $FFP: 4-1+2=5$
- $FFF: 4+3=7$

b)

sommes	1	3	5	7
probabilité	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

3) Il y a un seul tirage qui le mène à la ruine : $PPPP$. Il s'arrête alors au 4ème lancer et il y a $2^4=16$ tirages possibles de 4 lancers, ce qui donne donc une probabilité de $\boxed{\frac{1}{16}}$ qu'il soit ruiné.

Partie B

1) La somme maximale dont il peut disposer à la fin du jeu est $\boxed{6€+8€=14€}$ et il l'obtient par le tirage $FFFFFFFF$.

2) Dans ce cas, le joueur s'arrête au bout de 6 lancers, avec le tirage $PPPPPP$. Ce dernier correspond à 1 tirage sur les $2^6=64$ possibles à ce stade-là du jeu. Ainsi, cet évènement a une probabilité de $\boxed{\frac{1}{64}}$ de survenir.

3)

a) Tirages menant à la ruine :

- $PPPPPP$
- $FPPPPPPP$
- $PFPPPPPP$
- $PPFPPPPP$
- $PPPFPPPP$
- $PPPPFPPP$
- $PPPPPFPP$

b) Cela revient à calculer la probabilité d'obtenir un des tirages de la question 3a. On a déjà vu que le tirage $PPPPPP$ avait une probabilité de $\frac{1}{64}$ d'arriver. Pour les six autres, comme il y a au total $2^8=256$ tirages différents (et équiprobables) de huit lancers (quatre d'entre eux s'arrêtent au 6ème lancer, faute d'argent), chacun arrive avec une probabilité de $\frac{1}{256}$ donc finalement $P(S=0)=\frac{1}{64}+\frac{6}{256}=\frac{5}{128}$.

4)

a) Pour une somme finale de 10€, il suffit de gagner 6 fois et de perdre 2 fois, car $6€+6\times 1€+2\times(-1€)=10€$. Un tirage possible serait donc $FFFFFFPP$ ou $PFFFFFFP$, ou encore $FFPPFFFF$, etc… Pour dénombrer les tirages possibles menant à une telle somme, il s'agit donc de dénombrer les tirages comportant exactement deux P. Pour le premier, il y a 8 « positions » possibles, et pour le second il en reste 7, soit $8\times 7=56$ positions possibles, mais comme l'ordre des deux $Pile$ n'a aucune importance, chaque position est comptée deux fois au lieu d'une, donc finalement, le nombre de tirages possibles menant à 10€ est $\boxed{\frac{8\times 7}{2}=28 \text{ (autrement dit } \binom{8}{2})}$. (Il est impossible d'être ruiné avec seulement deux $Pile$, donc tous les tirages sont valides).

b) On ne peut pas obtenir 13€, car on part d'une somme paire, et que l'on effectue un nombre pair de lancers. En partant de 6€, il faudrait gagner 7€, ce qui est impossible avec un nombre pair de lancers, puisque cela reviendrait à gagner pour 7 lancers, et que les gains des lancers restants, qui sont en nombre impair, se compensent exactement.
(En effet, on peut même démontrer cette affirmation : si on appelle N_P le nombre de Piles obtenus et N_F le nombre de Faces obtenus, il faudrait $N_F-N_P=7$. Or, on a $N_F+N_P=8$, si le joueur n'est pas ruiné avant la fin. Par conséquent, soit le joueur est ruiné avant la fin du jeu, soit $N_F-(8-N_F)=7$, soit encore $2N_F=15$, ce qui est impossible, puisque N_F est un nombre entier)
Conclusion : $\boxed{P(S=13)=0}$.

c) De la même manière, on peut expliquer, voire démontrer qu'une somme impaire quelconque ne peut s'obtenir dans les conditions de cette partie.
(Démonstration : Un somme impaire est de la forme $2k+1$ avec $0\leq k\leq 6$, donc cela revient à $6+N_F-N_P=2k+1$. En raisonnant de la même manière que la question précédente, avec $N_F+N_P=8$, on obtient $2N_F=2k+3$, ce qui est encore impossible car k est un entier).
Donc la probabilité d'obtenir une somme impaire est nulle, et par conséquent la probabilité d'obtenir une somme paire est égale à 1.

Partie C

Il y a un tirage de N lancers qui mène à la ruine : $PPPP\ldots PPP$ et qui a une probabilité de $\frac{1}{2^N}$ de survenir.
Les autres tirages menant à la ruine comportent $N+2$ lancers, et il y a N tels tirages, puisqu'ils comportent un $Pile$ et -1 $Face$, et que le $Pile$ ne peut être obtenu que lors des N premiers lancers, après quoi le joueur serait de toutes façons ruiné.
D'autre part, il y a 2^{N+2} tirages possibles de $N+2$ lancers au total, donc la probabilité d'être ruiné avec $N+2$ lancers est de $\frac{N}{2^{N+2}}$.
Au total, la probabilité d'être ruiné est donc $\boxed{\frac{1}{2^N}+\frac{N}{2^{N+2}}=\frac{N+4}{2^{N+2}}}$.