MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Séries ES – L - STI2D – STMG – STL

Académie de NICE

Mercredi 18 mars de 8h à 12h

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

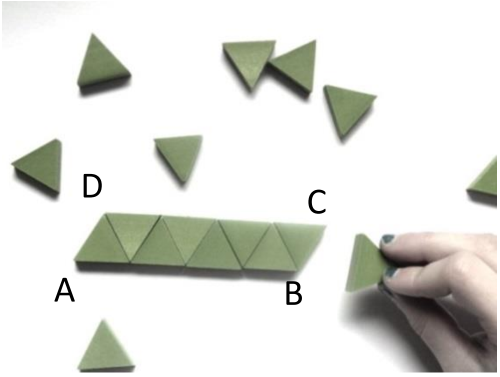
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2h heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1*(proposé par le jury national)*
Défi entre sœurs



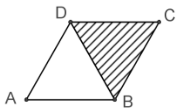
Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

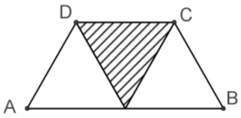
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

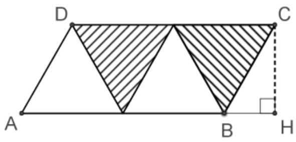
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



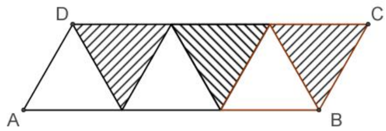
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?
3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

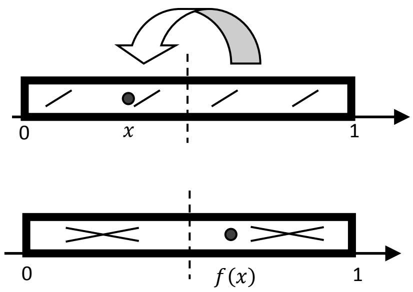
Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :
1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »
2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Exercice numéro 2 *(proposé par le jury national)*

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Annexe.

```
Variables
        x est un élément de [0 ,1]
Début
        Saisir  le nombre x compris entre 0 et 1
        Tant que x ≠ 0  faire
                Si  x ≤ 1/2  alors
                        x prend la valeur 2 x
                Sinon
                x prend la valeur 2(1 − x)
        Fin tant que
Fin
```

Exercice numéro 3 *(proposé par le jury académique)*
La suite de Protéus

<u>Préliminaire</u> : en informatique, **un mot** est une suite de 0 et de 1.

Par exemple : 010011 est un mot.

1) Combien peut-on former de mots de n chiffres (n non nul) ?
2) Expliquer pourquoi un mot d'au moins 4 chiffres comporte forcément, dans son écriture, deux blocs de chiffres consécutifs identiques.

A) Une transformation

On considère la transformation P qui opère sur les mots en remplaçant chaque 0 par 01 et chaque 1 par 10.
Ainsi :

- $P(0) = 01$ et $P(1) = 10$
- Si on considère par exemple le mot 010 alors : $P(010) = (01)\,(10)\,(01) = 011001$

A vous de jouer : déterminez $P(11)$ et $P(100)$.

B) La suite de Protéus

La suite de Protéus $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie ainsi : $t_0 = 0$; $t_1 = P(t_0)$; $t_2 = P(t_1)$; $t_3 = P(t_2)$ etc…, c'est-à-dire pour tout entier n positif, $t_{n+1} = P(t_n)$

1) Déterminer t_1, t_2 et t_3 .
2) Déterminer en fonction de n le nombre de chiffres qui composent t_n. Expliquer.
3) Y a-t-il toujours autant de 1 que de 0 dans chaque mot t_n de la suite de Protéus, pour tout entier n strictement positif ? Expliquer.

C) Le miroir

Pour tout mot m , on note $\overline{m}$ le mot obtenu en remplaçant dans m le chiffre 0 par 1 et le chiffre 1 par 0.
Par exemple : si $m = 010$ alors $\overline{m} = 101$

1) Déterminer $P(\,\overline{0}\,)$, $P(\,\overline{1}\,)$; pour tout mot m, comparer : $P(\,\overline{m}\,)$ et $\overline{P(m)}$.
2)
   a) En observant les mots t_1 , t_2 et t_3 vérifier qu'on peut construire simplement t_2 à partir de t_1 ainsi que t_3 à partir de t_2 .
   b) Expliquer pourquoi cette relation se poursuit de proche en proche et comment on peut construire t_{n+1} à partir de t_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   c) Comment peut-on retrouver à partir de cette relation le nombre de 0 et de 1 dans un mot quelconque t_n ?
   d) Quels sont les deux derniers chiffres du mot t_{2015} ?

D) Enigme 1

Dans le système binaire, les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 0 et 1. Par exemple, le nombre 13 s'écrit dans le système binaire 1101. En effet on peut le décomposer suivant les puissances décroissantes de 2 de la façon suivante :

$$13 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1$$

A vous de jouer : compléter le tableau suivant.

Nombre en base 10	0	1	2	3	4	5	6	7
N = Nombre en base 2	0	1	10	11	100			
S = Somme des chiffres de N				2				
Reste de la division euclidienne de S par 2				0				

En concaténant les chiffres de la dernière ligne, qui reconnaissez-vous ?

E) <u>Enigme 2</u>

Considérons les entiers de 1 à 8.

Nous souhaitons les séparer de façon à former deux ensembles E et F respectant les règles suivantes :

- ❖ E et F comportent le même nombre d'éléments.
- ❖ La somme des puissances $k^{ième}$ des éléments de E est égale à la somme des puissances $k^{ième}$ des éléments de F, pour $k = 1$ et $k = 2$

1) Trouver les deux ensembles E et F répondant au problème.

2) Quel lien existe-t-il entre les ensembles E et F , et le mot t_3

Exercice numéro 4 *(proposé par le jury académique)*
Sera-t-il ruiné ?

Un jeu de hasard consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée :

- ❖ Si la pièce tombe sur Pile, le joueur perd 1€ .
- ❖ Si la pièce tombe sur Face, le joueur gagne 1€ .

Un joueur commence avec une mise de N euros (N étant un entier positif), il effectue plusieurs lancers. On note S la somme dont il dispose à la fin du jeu. On admet que le jeu s'arrête si le joueur perd la totalité de sa mise. Lorsque la mise est perdue, on dit que le joueur est ruiné.

Par exemple, si $N = 3$, et qu'il obtient $Face, Pile, Pile, Pile, Pile$, alors il est ruiné.

<u>Partie A :</u> mise de 4€ .

On suppose dans cette partie que $N = 4$.

1) Combien de lancers le joueur peut-il effectuer au maximum pour avoir la garantie de ne pas être ruiné ?

2) Un joueur décide de s'arrêter au bout du troisième lancer.

a) Représenter cette situation par un arbre.

b) Compléter le tableau de probabilités suivant :

Somme s_i après les trois lancers		
$P(S = s_i)$		

3) Il décide finalement de poursuivre jusqu'au cinquième lancer.
Quelle est la probabilité qu'il soit ruiné ?

<u>Partie B :</u> mise de $6€$

On suppose dans cette partie que $N = 6$.

Un joueur décide d'effectuer jusqu'à huit lancers. Par exemple, un tirage obtenu pour les huit lancers serait : $PFFPPFFF$, pour une somme finale de $8€$.

1) Quelle est la somme maximale dont peut disposer le joueur à l'issue de ce jeu ? Donner le(s) tirage(s) offrant cette somme maximale.

2) Quelle est la probabilité que le joueur ne gagne aucun lancer, c'est-à-dire qu'il n'obtienne jamais $Face$?

3)

a) Lister les tirages menant à la ruine.

b) Déterminer $(S = 0)$, autrement dit la probabilité que le joueur soit ruiné.

4)

a) Est-il possible que la somme finale S soit égale à $10€$? Si oui, donner un tirage possible menant à cette somme, et déterminer le nombre total de tels tirages.

b) Quelle est la probabilité que la somme S soit égale à $13€$?

c) Quelle est la probabilité que le joueur dispose, à l'issue du jeu, d'une somme paire ?

<u>Partie C :</u> Généralisation

On appelle N la mise de départ, N étant un entier positif quelconque.

Un joueur décide d'effectuer jusqu'à $N + 2$ lancers.

Déterminer la probabilité que le joueur soit ruiné à l'issue du jeu.