MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de NICE

TOUTES SERIES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Mercredi 16 mars 2016

Deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10.

Exercices académiques

Les énoncés doivent être rendus à la fin de chaque épreuve.

Les candidats traitent **deux exercices.**

Exercice académique numéro 3 (à traiter par tous les candidats)

Informations préliminaires :

A- Distance euclidienne

Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère orthonormé.

On rappelle que la distance usuelle entre les points A et B est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Cette distance, notée $d(A,B)$ est appelée **distance euclidienne entre les points A et B .**

B- Distance du taxi

On rappelle que $|x|$ désigne la valeur absolue de x ; par exemple : $|-3| = 3$; $|5| = 5$; $|0| = 0$

Pour $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, on définit $d_t(A,B)$ par : $d_t(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$

Cette distance, notée $d_t(A,B)$ est appelée **distance du taxi entre les points A et B .**

Par exemple, si $A(0;0)$ et $B(1;-2)$ on a $d(A,B) = \sqrt{5}$ et $d_t(A,B) = 3$

I- Comparaison de la distance euclidienne et de la distance du Taxi

a) On considère dans un repère orthonormé les points $A(3;2) et\ B(-3;4)$.
   Calculer et comparer $d(A,B) et\ d_t(A,B)$.

b) Reprendre la question a) avec les points $A(5;2)$ et $B(5;4)$.

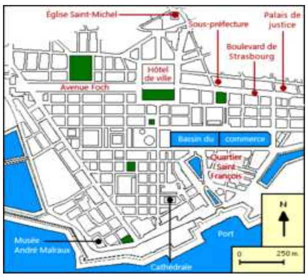
c) D'une manière générale, dans quels cas a-t-on $d(A,B) = d_t(A,B)$?
   Peut-on avoir $d(A,B) > d_t(A,B)$? On pourra s'aider d'un dessin qui représente la distance du taxi entre deux points A et B dans un repère orthonormé.

d) Peut-on trouver des points A et B distincts tels que $d_t(A,B) = \sqrt{2} \times d(A,B)$?

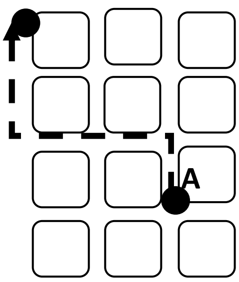
e) Peut-on trouver des points A et B distincts tels que $d_t(A,B) = 2 \times d(A,B)$?

II- Plans en damier

De nombreuses villes ont des plans d'urbanisme où les rues sont rectilignes et se croisent à angle droit, créant des îlots de forme carrée. On peut citer le centre-ville du Havre et le plan de Manhattan.



Sur le plan ci-dessous, un taxi souhaite partir d'un point $A(x_A, y_A)$ et arriver à un point $B(x_B, y_B)$ dans une ville construite en damier.



a) Si on considère que chaque pâté de maison mesure une unité, quelle est la distance euclidienne, « à vol d'oiseau » entre le point A et le point B ?

b) Le tracé en pointillés ci-dessus donne un itinéraire possible sans détour entre A à B.
   Déterminer le nombre d'itinéraires possibles (sans détour) pour aller de A à B.

III- Des cercles avec des angles…

On considère dans cette partie le point d'origine O d'un repère orthonormé du plan.

a) Quel est l'ensemble des points M du plan distants de 3 unités du point O en considérant la distance euclidienne ? Représenter cet ensemble.

b) Reprendre la question précédente en considérant cette fois -ci la distance du taxi. (On pourra commencer par placer quelques points).

<u>Exercice académique numéro 4</u> (à traiter par tous les candidats)

<u>Informations préliminaires :</u>

<u>Définition</u> : [entier premier]

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il admet exactement 2 diviseurs positifs : 1 et lui-même.

<u>Par exemple :</u> $2\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 7\,;\ 11$ sont premiers ; $0\,;\ 1\,;\ 6\,;\ 25$ ne sont pas premiers.

<u>Théorème (admis) :</u> Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .

n se décompose en un produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs. Par exemple, la décomposition en facteurs premiers de 245 est : $245 = 5 \times 7 \times 7 = 5 \times 7^2$

On note $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en facteurs premiers où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.

<u>Par exemple :</u> $20 = 2^2 \times 5 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2}$ avec $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = 2;\ p_2 = 5$ et $\alpha_2 = 1$

<u>Propriété (admise) :</u> Tout diviseur positif d de n est de la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

<u>Par exemple :</u> 20 possède 6 diviseurs positifs : $1,\quad 2,\quad 2^2 = 4,\quad 5,\quad 2 \times 5 = 10$ et $2^2 \times 5 = 20$

<u>Partie A</u>

1) Donner la décomposition en facteurs premiers de 30 puis de 60 .
2) Déterminer tous les diviseurs positifs de 30 et de 60 .
3) En dénombrant toutes les façons possibles de former un diviseur positif de n , montrer que le nombre de diviseurs positifs de $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ est $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$.
4) Trouver un nombre entier qui possède exactement 10 diviseurs positifs.

<u>Partie B</u>

On dit qu'un nombre entier est riche s'il peut s'écrire comme différence des carrés de deux entiers naturels. Par exemple, 27 est riche car $27 = 6^2 - 3^2$.

1) Trouver trois exemples d'entiers riches supérieurs à 10 (justifier la réponse**).**
2) a. Décomposer 76 en produit de facteurs premiers.

   b. En déduire le nombre de diviseurs positifs de 76 .

   c. Justifier que si $76 = a^2 - b^2$ avec a **et** b deux entiers alors $a - b$ et $a + b$ sont des diviseurs pairs de 76 .

d. Montrer que 76 est riche.

3) Montrer que tout nombre impair est riche.

4) Montrer qu'un entier n pair est riche si et seulement si n comporte au moins deux fois le facteur 2 dans sa décomposition en facteurs premiers.

5) Donner la liste des entiers compris entre 0 et 50 qui ne sont pas riches.