CORRIGE – ACADEMIE DE NICE

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2016

Exercice 3

I) **a)** $A(3\,;2)$ et $B(-3;4)$ alors $d(A,B)=\sqrt{(-3-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$ et $d_t(A,B)=|-3-3|+|4-2|=6+2=8$. Ainsi, $d(A,B)<d_t(A,B)$.

b) $A(5\,;2)$ et $B(5\,;4)$ alors $d(A,B)=\sqrt{(5-5)^2+(4-2)^2}=\sqrt{0+4}=2$ et $d_t(A,B)=|5-5|+|4-2|=0+2=2$. Ainsi, $d(A,B)=d_t(A,B)$.

c) En construisant un triangle ABC rectangle en C dont les côtés sont parallèles aux axes du repère, on remarque que $d(A,B)$ représente l'hypoténuse AB et $d_t(A,B)$ représente la somme des côtés AC+BC ; il s'agit donc de comparer l'hypoténuse et la somme des cotés dans un triangle rectangle. On peut aussi revenir aux formules : $d(A,B)=d_t(A,B)$ lorsque $x_A=x_B$ ou $y_A=y_B$.

<u>**En effet**</u>, $d(A,B)=d_t(A,B)\Leftrightarrow\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=|x_B-x_A|+|y_B-y_A|$.

Alors $\left(\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\right)^2=(|x_B-x_A|+|y_B-y_A|)^2$, ce qui entraîne $(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(x_B-x_A)^2+2.|x_B-x_A|.|y_B-y_A|+(y_B-y_A)^2$ en développant, et donc $|x_B-x_A|.|y_B-y_A|=0$. Autrement dit, on obtient une équation produit nul qui nous permet de conclure que <u>**si $d(A,B)=d_t(A,B)$, alors $x_A=x_B$ ou $y_A=y_B$**</u>. Inversement, <u>**si $x_A=x_B$ ou $y_A=y_B$, alors $d(A,B)=d_t(A,B)$.**</u>

<u>**On ne peut pas avoir $d(A,B)>d_t(A,B)$,**</u> puisque de la même manière que précédemment, cela entrainerait que $|x_B-x_A|.|y_B-y_A|<0$, ce qui est impossible par définition des valeurs absolues.

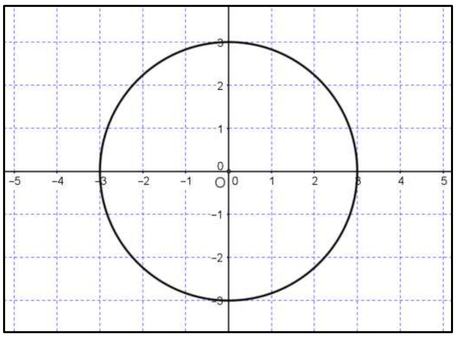
d) On peut observer que dans un carré de côté 1, la diagonale mesure $\sqrt{2}$. Il suffit donc de prendre A(1 ;0) et B(0 ;1), on a alors $d(A,B)=\sqrt{2}$ et $d_t(A,B)=2$; comme $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ on en déduit que $d_t(A,B)=\sqrt{2}\times d(A,B)$

e) La question revient à se demander si dans un triangle rectangle de côtés x et y , la somme $x+y$ peut être égale au double de l'hypoténuse $\sqrt{x^2+y^2}$ c'est-à-dire $x+y=2\sqrt{x^2+y^2}$; en élevant au carré, on obtient $x^2+2xy+y^2=4x^2+4y^2$ soit $0=3x^2-2xy+3y^2$; or,

$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2x^2 + 2y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + (x-y)^2$ est une somme de trois carrés qui ne peut être nulle que si $x = y = 0$, c'est-à-dire si A et B sont confondus.

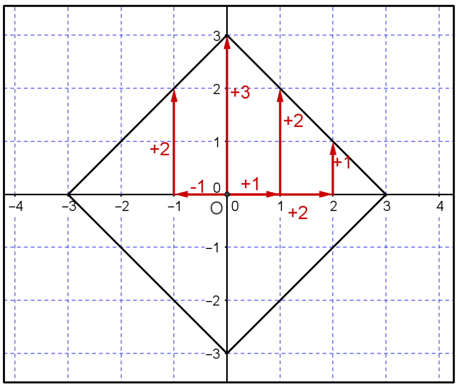
II) a) $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

b) Un itinéraire sans détour entre A et B nécessite **exactement 5 déplacements :** 2 horizontalement vers la gauche et 3 verticalement vers le haut, dans un ordre indifférent. Le tracé proposé, par exemple, correspond au déplacement $HGGHH$ (H pour un déplacement vertical d'une unité vers le haut et G pour un déplacement horizontal d'une unité vers la gauche). Ainsi, on recherche le nombre total de tels trajets, **ce qui revient à se demander combien de manières il y a de placer deux G parmi 5 emplacements** (les trois H venant automatiquement remplir les trois emplacements restants) : 5 possibilités pour le premier G , 4 pour le second, puis on divise par deux , car l'ordre des G ne compte pas : $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ **itinéraires possibles entre A et B .** On pouvait aussi utiliser une combinaison : $\binom{5}{2} = 10$.



La distance « taxi » est alors de **5 unités** dans tous les cas.

III) a) $d(O,M) = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$. Alors $d(O,M) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = 3$ soit $x_M^2 + y_M^2 = 9$. On reconnait une équation du **cercle de centre O et de rayon 3** , ou bien on constate que cela entraîne que $y_M = \sqrt{9 - x_M^2}$ ou $y_M = -\sqrt{9 - x_M^2}$ pour $x_M \in [-3; 3]$ et en traçant les deux courbes correspondantes, on obtient bien le cercle de centre O et de rayon 3.



b) $d_t(O,M) = |x_M - x_O| + |y_M - y_O| = |x_M| + |y_M|$. Alors $d_t(O,M) = 3 \Leftrightarrow |x_M| + |y_M| = 3$. Pour trouver un point M , on part de O et on se déplace de 3 unités, mais en combinant seulement des déplacements horizontaux ou verticaux. On obtient donc le carré de centre O dont les diagonales mesurent 6 unités et sont dirigées selon les axes.

Exercice 4

Partie A

1) $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

2) Diviseurs positifs de 30: $1, 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30$

Diviseurs positifs de 60: $1, 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60$

3) Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ et d un diviseur de n.

Alors: $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

On dénombre toutes les façons possibles de former la décomposition de ce diviseur:

On a $(\alpha_1 + 1)$ choix pour l'exposant de p_1 dans la décomposition de d (en notant qu'attribuer l'exposant 0 revient à ne pas faire figurer p_1 dans la décomposition car $p_1^0 = 1$) . Puis on a $(\alpha_2 + 1)$ choix pour l'exposant de p_2 etc... jusqu'à $(\alpha_k + 1)$ choix pour p_k

Le nombre de diviseurs de n est donc bien $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$

4) $10 = 2 \times 5 = (1+1) \times (4+1)$ donc par exemple $n = 5^4 \times 2^1 = 1250$ ou $n = 3^4 \times 2^1 = 162$ conviennent (possèdent exactement 10 diviseurs positifs).

Partie B

1) Par exemple : $10^2 - 1^2 = 99$; $8^2 - 5^2 = 39$ ou $11^2 - 10^2 = 21$ sont des nombres riches.

2) a) $76 = 2^2 \times 19$

b) $d(76) = (2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 = 6$. **Il y a donc 6 diviseurs positifs pour 76**

c) On a: $76 = a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$.

Or : **1.** Les **entiers $(a-b)$ et $(a+b)$ sont donc des diviseurs de 76 nombre pair.**

2. $(a-b)$ et $(a+b)$ ont même parité.

En effet: $a + b = (a-b) + 2b$ donc

Si : $a - b$ est pair, alors $a - b = 2k$ avec k entier, **soit** $a + b = 2k + 2b = 2(k+b) = 2k'$ avec k' entier donc $a + b$ est pair.

Si : $a - b$ est impair, alors $a - b = 2k + 1$ **avec k entier,** soit

$a + b = 2k + 1 + 2b = 2(k+b) + 1 = 2k' + 1$ avec k' entier donc $a + b$ est impair.

Conclusion: $(a+b)$ et $(a-b)$ ont même parité et leur produit est pair ; ils sont donc pairs. On en déduit que ces deux entiers **sont des diviseurs pairs de 76.**

d) On a démontré que si $76 = (a-b)(a+b)$ alors $(a+b)$ et $(a-b)$ sont des diviseurs pairs de 76. Ceci limite les possibilités à: $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 18 \end{cases}$

Ainsi: $76 = 20^2 - 18^2$ donc 76 **est un nombre riche.**

3) Soit $n = 2k + 1$ (avec k entier) un entier impair alors $n = (k+1)^2 - k^2$ où $k + 1$ et k sont bien des entiers naturels. Donc n est riche et on en conclut que **tout nombre impair est riche**.

4) **Si n est un entier pair riche** (Il y en a au moins un: 76 !), alors on a vu que $n = (a+b)(a-b)$ avec $a + b$ et $a - b$ pairs. Ainsi, $a + b$ et $a - b$ ont chacun au moins un facteur 2 dans leur décomposition en facteurs premiers et donc **n comprend au moins deux facteurs 2 dans sa décomposition**.

Réciproquement: Si n est un entier comportant au moins deux facteurs 2, alors: $n = 2^2 \times m$, il est nécessairement pair et le système $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m + 1 \\ b = m - 1 \end{cases}$ permet d'écrire $n = (m+1)^2 - (m-1)^2$ et de conclure que **n est pair riche.**

5) On a vu que tous les impairs sont riches ; D'autre part, on a vu que les pairs riches sont exactement ceux qui ont deux facteurs 2 dans leur décomposition en facteurs premiers, autrement dit les multiples de 4. Autrement dit, il reste : **$0 ; 2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22 ; 26 ; 30 ; 34 ; 38 ; 42 ; 46 ; 50$ entre 0 et 50 qui ne sont pas riches.**