Olympiades de mathématiques

SERIES AUTRES QUE S

Mercredi 15 mars 2017

1ère Partie de 8h à 10h : exercices nationaux.

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, les énoncés des deux parties sont séparés et distribués séparément à 8h puis à 10h10. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les énoncés doivent être rendus à la fin de chaque épreuve.

Exercice national n° 1 : *Sommes de carrés en abyme*

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25, f(29) = 2^2 + 9^2 = 85, f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. ***a.*** Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23), f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1), \dots, u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots u_8$ pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…

On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. ***a.*** Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?

b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?

d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u *entier naturel non nul*

Entrer u
  Tant que $(u \neq 1 \; et \; u \neq 4)$
  $u \leftarrow f(u)$
  Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.

a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.

b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.

6. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.

b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $(p \geq 4)$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.

c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national n° 2 : *Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)*

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?

2. ***a.*** Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.

b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.

c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

3. ***a.*** Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?

b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. ***a.*** Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?

b. Et pour répartir 75 canelés ?

c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.

a. Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?

b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?