



RÉGION ACADÉMIQUE
PROVENCE - ALPES - CÔTE D'AZUR



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Olympiades de mathématiques

SERIE S

Mercredi 15 mars 2017

1ère partie de 8h à 10h : exercices nationaux.

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, les énoncés des deux parties sont séparés et distribués séparément à 8h puis à 10h10. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus à la fin de chaque épreuve.

Tous les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice national numéro 1

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.

Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25$, $f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$, $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. **a.** Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f .
- b.** Calculer $f(23)$, $f(32)$ et $f(320)$.
- c.** Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f .

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0 , on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, ..., $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.

2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.

Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?

3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_8$ pour $u_0 = 4$.

Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée \mathcal{P} dans la suite du problème :

Si u_0 est un entier non nul :

- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N , $u_n = 1$.

- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,...

On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M .

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. a. Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?

b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété \mathcal{P} .

c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété \mathcal{P} ?

d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété \mathcal{P} . Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u entier naturel non nul

Entrer u

Tant que ($u \neq 1$ et $u \neq 4$)

$u \leftarrow f(u)$

Afficher u

Fin tant que

Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété \mathcal{P} s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.

a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.

b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_j \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0 .

6. a. Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.

b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres ($p \geq 4$), alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.

c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 2

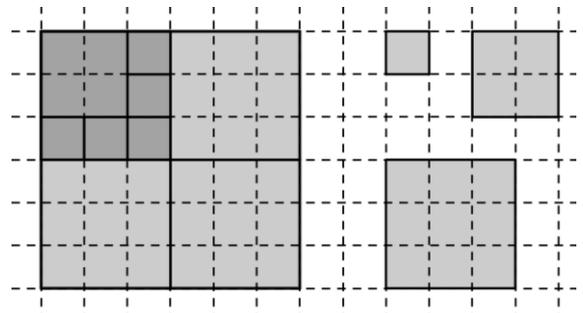
1,2,3 ...dallez !

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.

Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n . On note ce carré K_n , et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.

Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i .

On montre ci-contre un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. a. Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?

b. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1.

c. Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

Tout carré K_n peut être pavé avec n^2 carrés de taille 1. Certains K_n peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré K_n par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note $u(n)$ ce nombre.

2. Déterminer $u(1)$, $u(8)$ et $u(9)$.

3. Plus généralement, que vaut $u(n)$ si n est pair ? Que vaut $u(n)$ si n est un multiple de 3 ?

On s'intéresse donc dorénavant aux entiers n impairs et non multiples de 3.

4. **a.** Montrer que si n est impair et non multiple de 3, alors $n + 6$ est impair et non multiple de 3.

b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4 : $u(n + 6) \leq u(n)$ (on considérera les carrés K_{n+6} et K_n).

5. **a.** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que $u(11) \leq 1$.

b. Montrer que $u(13) \leq 1$.

c. On admet que $u(5) = 4$ (comme dit plus haut) et que $u(7) = 3$. Montrer que, pour tout entier n impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11, $u(n) \leq 1$.

Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?

6. Pour tout entier n impair, on partage le carré K_n en n^2 cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple (i, j) où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure, $n = 5$).

On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple (i, j) qui la repère, le coefficient -1 si i et j sont pairs, 1 si i et j sont impairs et 0 sinon.

a. Exprimer en fonction de n , la somme des coefficients de toutes les cases de K_n .

b. Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré K_n , alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou -3 .

c. Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?

d. Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?

e. Conclure que, pour tout entier n :

- $u(n) = 0$ si n est un multiple de 2 ou de 3 ;

- $u(n) = 1$ si n est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.

f. Que vaut $u(2017)$?

(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
(2,1)				
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)