



RÉGION ACADÉMIQUE
PROVENCE - ALPES - CÔTE D'AZUR

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Olympiades de mathématiques

TOUTES SERIES

Mercredi 15 mars 2017

2^{ème} partie : de 10h10 à 12h10 : exercices académiques.

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus à la fin de chaque épreuve.
Tous les candidats traitent **les deux exercices**.

EXERCICE 3 : CARTE AU TRESOR DANS UN CUBE

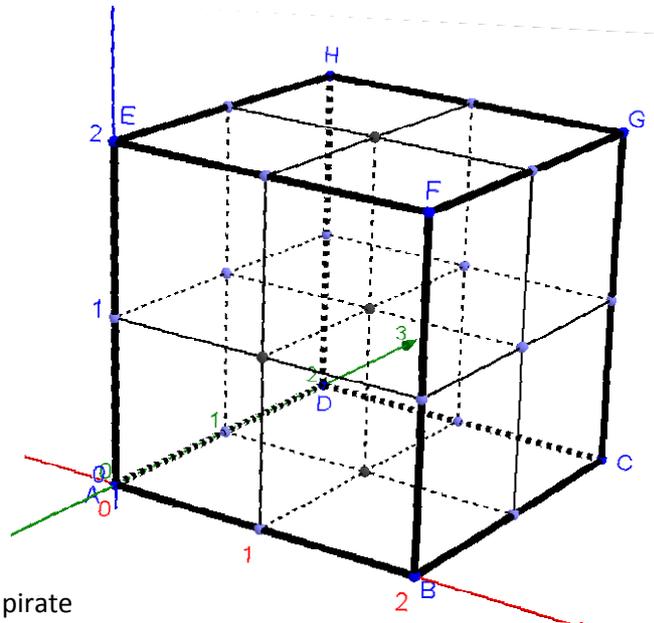
Théo joue à un jeu vidéo, dont voici le principe :

Le support est un cube $ABCDEFGH$ de côté 2. Pour se repérer plus facilement, on munit le cube du repère $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$. Autrement dit, le point A a pour coordonnées $(0; 0; 0)$, le point $B(2; 0; 0)$, le point $C(2; 2; 0)$, le point $H(0; 2; 2)$, etc .

Au début de la partie, un pirate se trouve en A . Son objectif est de s'emparer du trésor, se trouvant en G . Pour cela, il dispose de six déplacements exactement. Il a trois types de déplacements possibles : « d » : 1 vers la droite, « h » : 1 vers le haut et « f » : 1 vers le fond. Chaque déplacement est choisi au hasard par le programme du jeu, et déclenché par le clic du joueur.

Comme on ne peut pas sortir du cube, il se peut qu'un des six déplacements ne soit pas réalisable ; dans une telle situation, le pirate ne bouge pas et attend le prochain déplacement. Ainsi, tout trajet (composé de six déplacements successifs proposés par le programme) est « possible », même si chaque déplacement n'est pas nécessairement réalisé.

Par exemple, le tirage $dddffd$ conduit au point C .



Le pirate peut s'emparer d'un avant-goût du trésor (quelques pièces d'or), s'il parvient à un point dont les trois coordonnées sont identiques, et autre que les points de départ ou d'arrivée, autrement dit, le centre du cube. Ce gain est conservé quelle que soit l'issue des six déplacements.

En termes de points, lorsque le pirate s'empare du « mini trésor » au centre du cube, le joueur remporte 10 points ; lorsqu'il parvient en G , le joueur remporte 40 points (éventuellement cumulés au « mini trésor ») ; dans tous les autres cas, le joueur ne remporte aucun point.

On appelle X le gain, en nombre de points, de la partie, qui peut donc valoir 0, 10, 40 ou bien 50 points.

I) DENOMBRER LES TIRAGES

- 1) Un tirage est l'ensemble des six déplacements aléatoires considérés dans l'ordre où ils sont effectués ; par exemple, $dhhfhd$ est un tirage qui mène le pirate en $(2; 1; 2)$; $hhdhfd$ n'est pas le même tirage, puisque les déplacements ne se font pas dans le même ordre, mais il mène le pirate au même point.
 - a) Donner un exemple de tirage rapportant exactement 10 points.
 - b) Donner un exemple de tirage rapportant exactement 40 points.
 - c) Donner un exemple de tirage rapportant exactement 50 points.
- 2) Déterminer le nombre total de tirages différents que peut proposer le programme.
- 3) On veut dénombrer le nombre total de tirages gagnants, c'est-à-dire menant au trésor.
 - a) Combien de tirages gagnants commencent par dd ?
 - b) Combien de tirages gagnants commencent par df ?
 - c) Montrer qu'exactly 90 tirages mènent au trésor. On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.
- 4) Compter le nombre de tirages permettant de gagner 50 points, c'est-à-dire conduisant au « mini trésor » et au trésor.
- 5) Combien de tirages conduisent au centre du cube, sans mener au trésor ?

II) EN TERMES DE PROBABILITES

- 1) Quelle probabilité a Théo de gagner le trésor ?
- 2) Quelle probabilité a-t-il de gagner 50 points ?
- 3) Quelle probabilité a-t-il de gagner 40 points ?
- 4) Quelle probabilité a-t-il de ne gagner que le « mini-trésor » ?
- 5) Quelle est la probabilité pour que Théo ne gagne rien ?

III) ACCES AU NIVEAU SUPERIEUR

- 1) Calculer l'espérance de gain d'une partie de ce jeu, autrement dit $E(X)$, l'espérance de X .

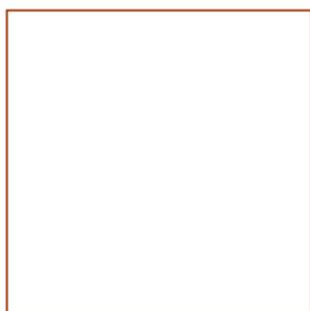
Rappel : $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_d \times P(X = x_d)$ pour une variable aléatoire X prenant pour valeurs $x_1; x_2; \dots; x_d$. L'espérance donne ici une estimation de la moyenne des gains obtenus sur un grand nombre de parties.

- 2) A partir de 220 points accumulés, Théo peut accéder au niveau suivant du jeu. On suppose qu'une partie lui demande environ 2 minutes de jeu. En moyenne, au bout de combien de temps de jeu peut-il espérer accéder au niveau supérieur ? Expliquer.

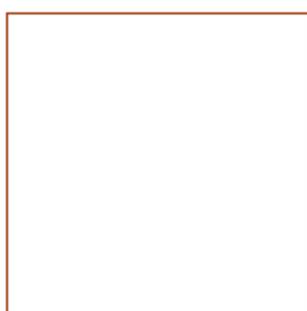
EXERCICE 4 : CARREMENT PAVE

Un jeu consiste à recouvrir un plateau carré en bois à l'aide de pièces elles-mêmes de forme carrée.
Le recouvrement ne doit comporter ni trou, ni chevauchement, ni débordement du plateau.
Les pièces peuvent être de tailles différentes, mais aucune ne recouvre à elle seule le plateau.

- 1) De combien de pièces carrées faut-il disposer au minimum pour recouvrir le plateau ?
- 2) Expliquez pourquoi il n'est pas possible de recouvrir le plateau en utilisant exactement 5 pièces.
- 3) Proposez un recouvrement du plateau carré ci-dessous à l'aide de 9 puis 6 et enfin 7 pièces carrées de la taille de votre choix.



9 pièces



6 pièces



7 pièces

- 4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - a) Compléter l'égalité $n^2 = (n - 1)^2 + \dots$
 - b) Déduisez-en comment recouvrir un plateau carré de côté n en utilisant exactement $2n$ pièces carrées (on pourra commencer par placer une pièce de côté $n-1$).
 - c) En déduire comment on peut recouvrir ce plateau en utilisant exactement $2n+3$ pièces carrées.
 - d) Dessiner un recouvrement d'un plateau carré utilisant exactement 12 pièces.
 - e) Dessiner un recouvrement d'un plateau carré utilisant exactement 13 pièces.
- 5) Nous avons réussi à recouvrir ci-dessous un plateau carré en utilisant exactement 17 pièces carrées. Les codages indiquent les pièces identiques. Les plus petites pièces sont des carrés de côté 1 cm. Quelles sont les dimensions du plateau ? Justifiez.

