National 1 (toutes séries)
Sommes de carrés en abyme : une rédaction possible

1. *a.* On a successivement : $f(1)=1, f(11)=2, f(111)=3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2 $f(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)=n$
b. $f(23)=f(32)=f(320)=13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intecalés.

2. Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

3. Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

4. *a.* L'algorithme affiche 20 puis 4.
b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N, tel que $u_n=1$, alors pour tout $n\geq 1, u_n=1$.
De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M=4$, alors à partir du rang M, les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.
Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4. L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique.
c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u\neq 1 \ et \ u\neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.
d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

5. *a.* Soit $x=100a+10b+c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a\neq 0$). On a :
$$\boldsymbol{x}-f(x)=100a+10b+c-a^2-b^2-c^2=a(100-a)+b(10-b)+c(1-c)$$
Le terme $a(100-a)$est minimum pour $a=1$ et son minimum est 99.
Le terme $b(10-b)$ est positif.
Donc $x-f(x)\geq 99+c(1-c)$
On en déduit que $x-f(x)>0$ et donc que $x-f(x)\geq 1$, car ce nombre est entier.
b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite décroissante… Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.
La propriété $\mathcal{P}$ est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

6. *a.* Il revient au même de montrer l'inégalité proposée que montrer que, pour tout entier $p\geq 4$, $9p\leq 10^{p-2}+10^{p-3}+\cdots+10^1+1$ (on fait apparaître $10^{p-1}-1$)
On peut écrire $10^{p-2}+10^{p-3}+\cdots+10^1+1=10(10^{p-3}+10^{p-4}+\cdots+10^1+1)+1$
Dans la parenthèse se trouvent $p-4$ entiers supérieurs à 1, dont $p-3$ sont supérieurs à 10. Leur somme est supérieure à $10(p-3)+1$. Finalement $10^{p-2}+10^{p-3}+\cdots+10^1+1\geq 100p-289$. Ce dernier terme est supérieur à $9p$ dès que $p>3$.
b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$. Le successeur de u_n a donc moins de chiffres.
c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.