<u>OLYMPIADES 2017 : CORRIGE DES EXERCICES ACADEMIQUES</u>

Exercice 3 : CARTE AU TRESOR DANS UN CUBE

I)1) a) $\boldsymbol{dhfffh}$ mène en (1 ; 2 ; 2), donc n'atteint pas le trésor, mais passe par le centre du cube, et rapporte donc 10 points.

b) $\boldsymbol{ddhhff}$ mène en G, donc au trésor, mais ne passe pas par le centre du cube, et rapporte donc exactement 40 points.

c) $\boldsymbol{dhffhd}$ passe par le centre du cube et mène à G ; ainsi, il permet de rapporter le mini-trésor et le trésor, soit un total de $40 + 10 = 50$ points.

2) Trois possibilités pour chaque déplacement, donc un total de <u>$3\times3\times3\times3\times3\times3 = 3^6 = \mathbf{729}$ tirages possibles.</u>

3) a) Pour être gagnant, un tirage doit comporter en tout deux « h », deux « d » et deux « f » (dans un ordre indifférent). Donc les tirages gagnants commençant par dd ne sont autres que
$hhff$; $ddffhh$; $ddfhfh$; $ddfhhf$; $ddhfhf$; $ddhffh$. **<u>Il y en a donc 6</u>**. Cela se retrouve par les combinaisons : $\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$.

b) De même, les tirages gagnants commençant par df sont :
$dfdfhh$; $dfdhfh$; $dfdhhf$; $dffdhh$; $dffhdh$; $dffhhd$; $dfhhdf$; $dfhhfd$; $dfhdhf$; $dfhdfh$; $dfhfdh$; $dfhfhd$
<u>Il y en a donc 12</u>. Cela se retrouve par les combinaisons : $\binom{4}{2}\times\binom{2}{1}\times\binom{1}{1}$

c) On compte le nombre de tirages comportant deux « h », deux « d » et deux « f » (dans un ordre indifférent) puisque c'est la seule façon de parvenir à G en 6 coups exactement. On trouve au total **<u>$\mathbf{90}$ chemins</u>** ($3\times6 = 18$ dont les deux premières lettres sont identiques (3 cas) + $6\times12 = 72$ comportant deux premières lettres distinctes (6 cas)).

On retrouve ce résultat par les combinaisons : $\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$.

4) <u>Nombre de tirages passant par le « mini-trésor » et menant au trésor :</u> on cherche, parmi les chemins gagnants, ceux qui passent par le « mini trésor », autrement dit, ceux dont les trois premiers déplacements ne comportent aucune répétition (la seule façon d'arriver au « mini trésor » est de faire un déplacement exactement de chaque type, consécutivement, donc 3 déplacements distincts), ce qui fait 6 possibilités pour le premier groupe de trois lettres et 6 possibilités pour le second groupe de trois lettres (il reste un déplacement de chaque type, soit trois déplacements distincts là aussi), soit un total de <u>$6\times6 = \mathbf{36}$ **tirages**</u> rapportant 50 points.

5) <u>Nombre de tirages passant par le « mini-trésor » sans mener au trésor :</u> Comme on l'a expliqué dans la question précédente, les trois premiers déplacements sont nécessairement distincts ; le nombre total de tirages permettant de s'emparer du mini-trésor (sans tenir compte de la suite) est donc $6\times3\times3\times3 = \mathbf{162}$ (6 combinaisons possibles pour les trois premiers déplacements et 3 possibilités pour chacun des déplacements suivants, qui sont quelconques) . Donc il reste : <u>$162 - 36 = \mathbf{126}$ **tirages**</u> permettant de remporter le « mini trésor » sans pour autant s'emparer du trésor.

II) **1)** $P(X = 50\ ou\ X = 40) = \frac{90}{729} \approx 0{,}123 = \mathbf{12{,}3}\%$ **2)** $P(X = 50) = \frac{36}{729} \approx 0{,}049 = \mathbf{4{,}9}\%$

3) $P(X = 40) = \frac{90-36}{729} = \frac{54}{729} \approx 0{,}074 = \mathbf{7{,}4}\%$ **4)** $P(X = 10) = \frac{126}{729} \approx 0{,}173 = \mathbf{17{,}3}\%$

5) $P(X = 0) = \frac{729-(90-3\ \ )-16}{729} \approx 0{,}704 = \mathbf{70{,}4}\%$

III) **1)** $E(X) = 50\times P(X = 50) + 40\times P(X = 40) + 10\times P(X = 10) + 0\times P(X = 0)$

$$\approx 50\times0{,}049 + 40\times\frac{54}{729} + 10\times\frac{162-36}{729} + 0\times0{,}704$$

$$\approx 50\times0{,}049 + 40\times0{,}074 + 10\times0{,}173 = \mathbf{7{,}14}$$

Une partie de ce jeu rapporte donc en moyenne **<u>$\mathbf{7{,}14}$ points</u>** .

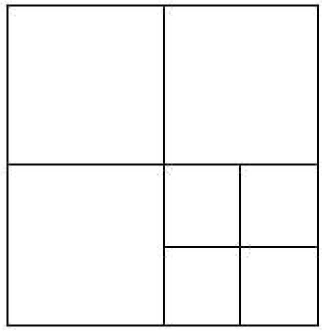
2) $\frac{220}{7{,}14} \approx 30{,}8$; il faudra donc 31 parties à Théo, en moyenne, pour accéder au niveau suivant, soit **62 minutes** de jeu.

Exercice 4 : « Carrément pavé »

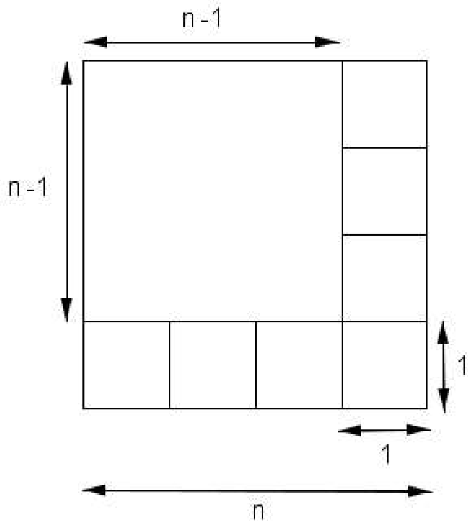
1. Le minimum est 4 pièces.

2. Supposons que 5 pièces recouvrent le plateau. Une même pièce ne peut pas occuper 2 sommets du plateau. Considérons les 4 pièces occupant les sommets :
- soit ces pièces sont des quarts de plateau. Mais alors elles ne laisseraient aucun espace libre pour la 5° pièce.
- soit elles ne sont pas des quarts de plateau. Mais alors l'espace restant ne peut pas être un carré.

3. Pour 9, il suffit de recouvrir par 3x3=9 carrés identiques. Pour 6, il suffit de regrouper 4 carrés en un seul dans la configuration précédente. Pour 7, on peut par exemple considérer la configuration ci-contre :



4.a. $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$
b. Il suffit de diviser le plateau en n^2 carrés de côté 1, puis de regrouper $(n-1)^2$ pièces parmi elles pour former une seule pièce carrée de côté $n-1$. A cette pièce, on ajoute les $n + n - 1 = 2n - 1$ pièces de côté 1 restantes pour former un ensemble de $2n - 1 + 1 = 2n$ pièces.



c. Il suffit dans la configuration précédente de subdiviser une pièce carrée en quatre pièces carrées identiques.
d. Il suffit de prendre n=6 dans la question b.
e. Il suffit de prendre n=5 dans la question c.

5.
On peut montrer que des carrés de côté 1, 2, 3 et 4 cm conviennent ; le plateau a donc une largeur de 11 cm.
On peut aussi résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues : en notant x le côté de la plus grande pièce, y le côté d'un carré hachuré, z le côté d'un carré blanc et c le côté du plateau, on obtient les équations suivantes :
$2x + y = c$
$z + 1 = y$
$y + 1 = x$
$2y + 2z + 1 = c$

La résolution du système fournit x = 4 ; y = 3 ; z = 2 ; c = 11.