Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

académie
Nice

RÉGION ACADÉMIQUE
PROVENCE-ALPES-CÔTE D'AZUR

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

PRESENTATION DU CONCOURS DES OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES DE L'ACADEMIE DE NICE

Session 2018

Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques

de l'académie de Nice

SOMMAIRE

Introduction

Concours destiné à développer le goût des mathématiques, de la recherche et de l'esprit d'initiative, les Olympiades de mathématiques ont été créées en 2001 pour les élèves des classes de premières scientifiques et technologiques et ont été ouvertes depuis 2005 aux autres séries. En 2011, elles se sont étendues au réseau des lycées français à l'étranger.

Ce document est destiné à présenter le concours des Olympiades dans l'académie de Nice : modalités d'inscription, déroulement des épreuves, rôle du jury académique, taux de participation des établissements, nombre d'élèves inscrits, répartition par séries et par sexe des candidats, énoncés des sujets des épreuves nationale et académique de la session 2017.

À ces informations s'ajoutent une sitographie indiquant des liens vers des sources officielles (Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche) et associatives (Animath, APMEP) ainsi que des ressources documentaires utiles aux professeurs et aux élèves dans la préparation du concours.

Depuis plusieurs années, les lauréats des Olympiades académiques sont récompensés généreusement lors de la cérémonie de remise des prix académique au mois de juin, par nos partenaires et sponsors : Inria, Crédit Mutuel Enseignant, Casio, Texas Instruments, Google, Wolfram, Hewlett Packard.

Les IA-IPR de mathématiques de l'académie de Nice

Présentation du concours

Public concerné

Les Olympiades de mathématiques sont ouvertes aux **lycéens de classes de premières de toutes séries**, scolarisés dans des établissements publics ou privés sous contrat, généraux, technologiques, agricoles ou militaires, sur la base du volontariat.

Déroulement des épreuves – session 2018

Calendrier

Fin novembre 2017, les professeurs de mathématiques de l'académie sous couvert du chef d'établissement reçoivent un courrier d'information de l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques sur les Olympiades de mathématiques faisant un bilan des sessions antérieures et donnant des informations sur la session à venir. Ce courrier est accompagné d'une affiche décrivant l'épreuve qui est à diffuser auprès des professeurs de mathématiques, des professeurs-documentalistes et des élèves.

Début janvier 2018, le Département des Examens et Concours du Rectorat de Nice informe les établissements de la date des épreuves et des modalités d'inscription (dates d'ouverture et de clôture des inscriptions, modalités d'inscription) début **janvier 2018**.

L'épreuve se déroule un mercredi de la **deuxième quinzaine du mois de mars**, pendant la Semaine des mathématiques.

Lieu, date et heure des épreuves

Les épreuves des Olympiades académiques de l'académie de Nice pour la session 2018 se déroulent le **mercredi 14 mars 2018 de 8h00 à 12h10**.

Les candidats inscrits composent au sein de leur établissement (ou regroupements d'établissement).

Modalités

L'épreuve se déroule en **deux parties** de **deux heures chacune**, séparées d'un intermède de dix minutes. Les sujets sont distribués au début de chacune des parties, de sorte qu'il n'est pas possible de travailler sur les énoncés d'une partie pendant l'autre. Les copies correspondant à la première partie sont définitivement relevées à l'issue de celle-ci.

La première partie de l'épreuve est consacrée aux exercices choisis par le jury national. Chaque candidat doit résoudre **individuellement** deux exercices. Le premier est commun aux élèves de toutes les séries. Le second énoncé est spécifique de la série (un exercice pour les lycéens de la série S, un pour les autres séries).

La seconde partie de l’épreuve comprend deux exercices, élaborés par le jury académique, dont la résolution est aussi **individuelle**. Le premier exercice est commun à toutes les séries, le second exercice est spécifique de la série : pour la série S ou commun aux autres séries sauf la série S.

La calculatrice (y compris les anciens modèles) est autorisée pour les parties nationale et académique des épreuves.

Les objectifs des exercices

Les connaissances nécessaires pour aborder l’épreuve sont fondées sur les programmes des classes de collège et de seconde générale et technologique, augmentés d’un programme complémentaire commun aux différentes classes de première.

Les exercices ont pour objectif de privilégier le raisonnement, le sens de l’initiative, le goût de la recherche et le plaisir de trouver.

Les exercices se veulent inventifs, progressifs avec des questions accessibles, d’une longueur raisonnable, faisant place à du codage.

L’un des deux exercices nationaux accorde une place à l’algorithmique.

Le jury académique

Composition du jury

Le jury académique est composé d'un IA-IPR président du jury académique, de 4 professeurs concepteurs de sujets académiques et d'une quinzaine de professeurs correcteurs des copies (partie nationale et partie académique).

Rôle du jury

Dans un premier temps, le jury propose des sujets au jury national (1ère partie de l'épreuve) et conçoit les sujets académiques (2ème partie de l'épreuve).

Dans un deuxième temps, le jury académique corrige les copies, établit le classement des candidats et met au point le palmarès académique.

Le jury académique envoie au jury national les trois ou quatre meilleures copies de l'ensemble de l'épreuve pour chacune des catégories : série S et autres séries que la série S.

Délibération du jury académique

Le jury académique se réunit en avril sous la présidence de l'IA – IPR de mathématiques.

La sélection des copies susceptibles d'être primées au palmarès national s'effectue sur la base des exercices nationaux sauf contre-performance sur la partie académique. Pour la sélection au niveau national, le jury national s'est fondé sur les exercices nationaux et a départagé les éventuels ex-aequo à l'aide des exercices académiques.

La sélection des copies primées au niveau académique s'effectue sur la base des exercices académiques sauf contre-performance sur la partie nationale.

En tous les cas, un élève absent à l'une des épreuves ne peut être primé pour l'épreuve qu'il a traitée. C'est sur l'ensemble de deux épreuves (nationale et académique) que la copie du candidat est évaluée.

Diffusion du palmarès académique et remise des prix

Les palmarès académique et national par classement alphabétique sont envoyés aux établissements vers la mi-mai.

Le palmarès académique par classement au mérite est dévoilé le jour de la remise des prix au mois de juin dans un haut-lieu de la recherche scientifique de l'académie de Nice.

Quelques statistiques

Nombre d'établissements ayant présenté des candidats

L'académie de Nice compte 60 lycées généraux et technologiques. Monaco compte 2 lycées.

	Session 2014	Session 2015	Session 2016	Session 2017
Nombre de lycées (académie de Nice et Monaco)	29	27	27	30

Nombre de candidats inscrits

	Session 2014	Session 2015	Session 2016	Session 2017
Nombre de candidats inscrits (académie de Nice et Monaco)	590	338	272	375

Répartition par séries des candidats inscrits

Effectifs	Session 2014	Session 2015	Session 2016	Session 2017
S	527	305	253	308
ES	27	2	8	1
L	4	0	2	0
STI2D	12	31	4	13
STMG	3	0	0	0
STD2A	17	0	0	1
ST2S	0	0	1	52
STL	0	0	4	0
Total	**590**	**338**	**272**	**375**

Effectifs	Session 2014	Session 2015	Session 2016	Session 2017
S	527	305	253	308
Autres séries	63	33	19	67
Total	**590**	**338**	**272**	**375**

Répartition filles/garçons par séries des candidats inscrits

	Session 2014		Session 2015		Session 2016		Session 2017	
Effectifs	F	G	F	G	F	G	F	G
S	190	337	117	188	84	169	116	192
ES	12	15	2	0	3	5	0	1
L	3	1	0	0	1	1	0	0
STI2D	0	12	7	24	0	4	0	13
STMG	0	3	0	0	0	0	0	0
STD2A	17	0	0	0	0	0	0	1
ST2S	0	0	0	0	1	0	42	10
STL	0	0	0	0	3	1	0	0
Total	**222**	**368**	**126**	**212**	**92**	**180**	**158**	**217**
Pourcentages / inscrits	**38%**	**62%**	**37%**	**63%**	**34%**	**66%**	**42%**	**58%**

Les épreuves

Sujets des épreuves nationales (session 2017)

Les candidats traitent deux exercices. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Somme de carrés en abyme*) et 2 (*1,2,3 … dallez !*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Somme de carrés en abyme*) et 3 (*Boîte de canelés bordelais*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25, f(29) = 2^2 + 9^2 = 85, f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction
1. *a.* Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23), f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier
Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1), \ldots, u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots u_8$ pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété
On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.
4. *a.* Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?
d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u *entier naturel non nul*
Entrer u
Tant que $(u \neq 1 \ et \ u \neq 4)$
$u \leftarrow f(u)$
Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.

a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.

b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.

6. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.

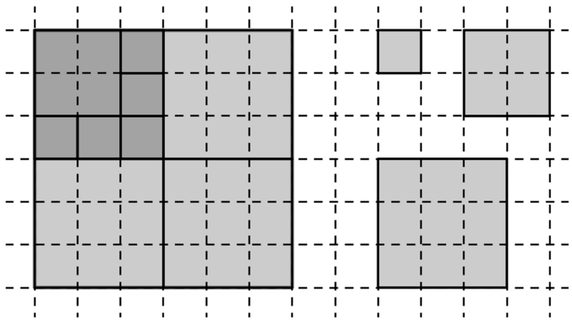
b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres ($p \geq 4$), alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.

c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

1,2,3 …dallez !

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.
Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n. On note ce carré K_n, et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.
Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i.
On montre ci-contre un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. ***a.*** Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?

b. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1.

c. Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

Tout carré K_n peut être pavé avec n^2 carrés de taille 1. Certains K_n peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré K_n par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note $u(n)$ ce nombre.

2. Déterminer $u(1)$, $u(8)$ et $u(9)$.

3. Plus généralement, que vaut $u(n)$ si n est pair ? Que vaut $u(n)$ si n est un multiple de 3 ?

On s'intéresse donc dorénavant aux entiers n impairs et non multiples de 3.

4. ***a.*** Montrer que si n est impair et non multiple de 3, alors $n + 6$ est impair et non multiple de 3.

b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4 : $u(n + 6) \leq u(n)$ (on considérera les carrés K_{n+6} et K_n).

5. ***a.*** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que $u(11) \leq 1$.

b. Montrer que $u(13) \leq 1$.

c. On admet que $u(5) = 4$ (comme dit plus haut) et que $u(7) = 3$. Montrer que, pour tout entier n impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11, $u(n) \leq 1$.

Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?

6. Pour tout entier n impair, on partage le carré K_n en n^2 cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple (i,j) où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure, $n=5$).
On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple (i,j) qui la repère, le coefficient -1 si i et j sont pairs, 1 si i et j sont impairs et 0 sinon.

(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
(2,1)				
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)

a. Exprimer en fonction de n, la somme des coefficients de toutes les cases de K_n.
b. Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré K_n, alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou −3.
c. Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?
d. Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?
e. Conclure que, pour tout entier n :
- $u(n)=0$ si n est un multiple de 2 ou de 3 ;
- $u(n)=1$ si n est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.

f. Que vaut $u(2017)$?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.
1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?
2. *a.* Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.
b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.
c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

3. *a.* Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. *a.* Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
b. Et pour répartir 75 canelés ?
c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

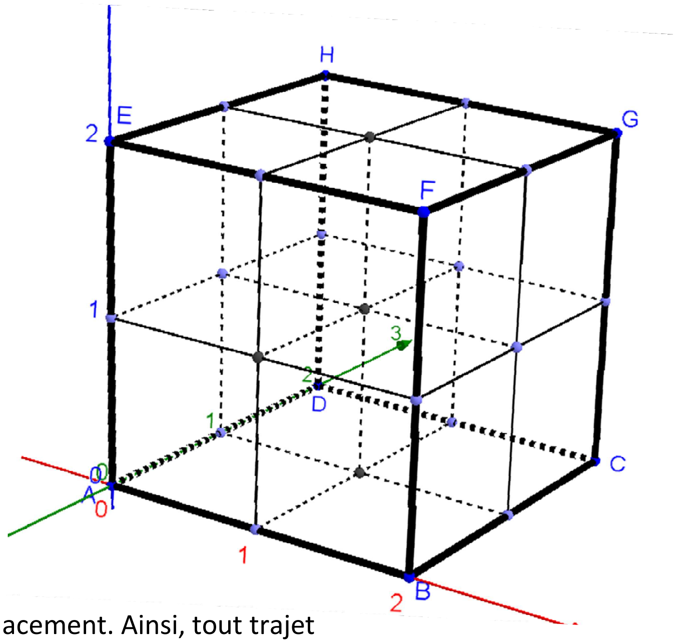
5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.
a. Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?
b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

Sujet de l'épreuve académique de l'académie de Nice (session 2017)

Ce sujet est commun à toutes les séries.

EXERCICE 1 : CARTE AU TRESOR DANS UN CUBE



Théo joue à un jeu vidéo, dont voici le principe :

Le support est un cube $ABCDEFGH$ de côté 2. Pour se repérer plus facilement, on munit le cube du repère $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$. Autrement dit, le point A a pour coordonnées $(0;0;0)$, le point $B(2;0;0)$, le point $C(2;2;0)$, le point $H(0;2;2)$, etc .

Au début de la partie, un pirate se trouve en A. Son objectif est de s'emparer du trésor, se trouvant en G. Pour cela, il dispose de six déplacements exactement. Il a trois types de déplacements possibles : « d » : 1 vers la droite, « h » : 1 vers le haut et « f » : 1 vers le fond. Chaque déplacement est choisi au hasard par le programme du jeu, et déclenché par le clic du joueur.

On ne peut pas sortir du cube, donc il se peut que le déplacement tiré au hasard ne soit pas réalisable ; dans une telle situation, le pirate ne bouge pas et attend le prochain déplacement. Ainsi, tout trajet (composé de six déplacements successifs proposés par le programme) est « possible », même si chaque déplacement n'est pas nécessairement réalisé.

Le pirate peut s'emparer d'un avant-goût du trésor (quelques pièces d'or), s'il parvient à un point dont les trois coordonnées sont identiques, et autre que les points de départ ou d'arrivée, autrement dit, ici, le centre du cube. Ce gain est conservé quelle que soit l'issue des six déplacements.

En termes de points, lorsque le pirate s'empare du « mini trésor », le joueur remporte 10 points ; lorsqu'il parvient en G, le joueur remporte 40 points (éventuellement cumulés au « mini trésor ») ; dans tous les autres cas, le joueur ne remporte aucun point.
On appelle X le gain, en nombre de points, de la partie, qui peut donc valoir 0, 10, 40 ou bien 50 points.

I) DENOMBRER LES TIRAGES

1) Un tirage est l'ensemble des six déplacements aléatoires considérés dans l'ordre où ils sont effectués ; par exemple, $dhhfhd$ est un tirage qui mène le pirate en $(2;1;2)$; $hhdhfd$ n'est pas le même tirage, puisque les déplacements ne se font pas dans le même ordre, mais il mène le pirate au même point.

- **a)** Donner un exemple de tirage rapportant exactement 10 points.
- **b)** Donner un exemple de tirage rapportant exactement 40 points.
- **c)** Donner un exemple de tirage rapportant exactement 50 points.

2) Déterminer le nombre total de tirages différents que peut proposer le programme.

3) On veut dénombrer le nombre total de tirages gagnants, c'est-à-dire menant au trésor.

- **a)** Combien de tirages gagnants commencent par dd ?
- **b)** Combien de tirages gagnants commencent par df ?
- **c)** Montrer qu'exactement 90 tirages mènent au trésor. On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.

4) Compter le nombre de tirages permettant de gagner 50 points, c'est-à-dire conduisant au « mini trésor » et au trésor.
5) Combien de tirages conduisent au centre du cube, sans mener au trésor ?

II) EN TERMES DE PROBABILITES

1) Quelle probabilité a Théo de gagner le trésor ?
2) Quelle probabilité a-t-il de gagner 50 points ?
3) Quelle probabilité a-t-il de gagner 40 points ?
4) Quelle probabilité a-t-il de ne gagner que le « mini-trésor » ?
5) Quelle est la probabilité pour que Théo ne gagne rien ?

III) ACCES AU NIVEAU SUPERIEUR

1) Calculer l'espérance de gain d'une partie de ce jeu, autrement dit $E(X)$, l'espérance de X .

Rappel : $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_d \times P(X = x_d)$ *pour une variable aléatoire* X *prenant pour valeurs* $x_1; x_2; \dots; x_d$. *L'espérance donne ici une estimation de la moyenne des gains obtenus sur un grand nombre de parties.*

2) A partir de 220 points accumulés, Théo peut accéder au niveau suivant du jeu. On suppose qu'une partie lui demande environ 2 minutes de jeu. En moyenne, au bout de combien de temps de jeu peut-il espérer accéder au niveau supérieur ? Expliquer.

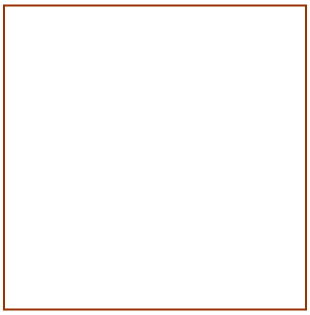
EXERCICE 2 : CARREMENT PAVE

Un jeu consiste à recouvrir un plateau carré en bois à l'aide de pièces elles-mêmes de forme carrée.

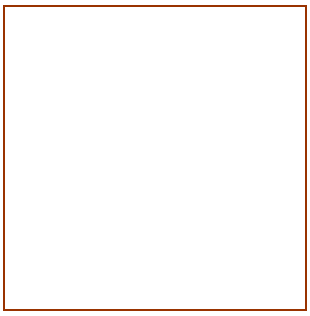
Le recouvrement ne doit comporter ni trou, ni chevauchement, ni débordement du plateau.

Les pièces peuvent être de tailles différentes, mais aucune ne recouvre à elle seule le plateau.

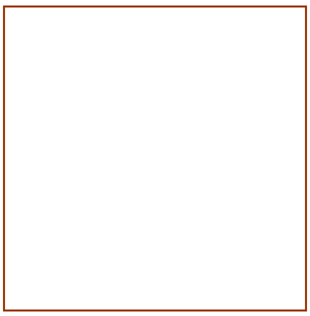
1) De combien de pièces carrées faut-il disposer au minimum pour recouvrir le plateau ?
2) Expliquez pourquoi il n'est pas possible de recouvrir le plateau en utilisant exactement 5 pièces.
3) Proposez un recouvrement du plateau carré ci-dessous à l'aide de 9 puis 6 et enfin 7 pièces carrées de la taille de votre choix.



9 pièces



6 pièces



7 pièces

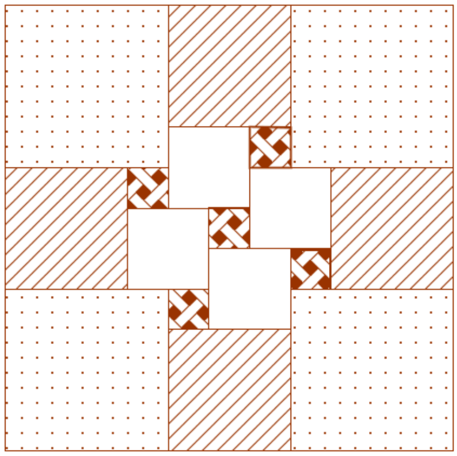
4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- **a)** Compléter l'égalité $n^2 = (n-1)^2 + ...$
- **b)** Déduisez-en comment recouvrir un plateau carré de côté n en utilisant exactement 2n pièces carrées (on pourra commencer par placer une pièce de côté n-1).
- **c)** En déduire comment on peut recouvrir ce plateau en utilisant exactement 2n+3 pièces carrées.
- **d)** Dessiner un recouvrement d'un plateau carré utilisant exactement 12 pièces.
- **e)** Dessiner un recouvrement d'un plateau carré utilisant exactement 13 pièces.

5) Nous avons réussi à recouvrir ci-dessous un plateau carré en utilisant exactement 17 pièces carrées. Les codages indiquent les pièces identiques.

Les plus petites pièces sont des carrés de côté 1 cm.

Quelles sont les dimensions du plateau ? Justifiez.



Corrigés des épreuves nationales (session 2017)

National 1 (toutes séries)
Sommes de carrés en abyme : une rédaction possible

1. *a.* On a successivement : $f(1) = 1, f(11) = 2, f(111) = 3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2 $f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = n$
b. $f(23) = f(32) = f(320) = 13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intecalés.

2. Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

3. Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

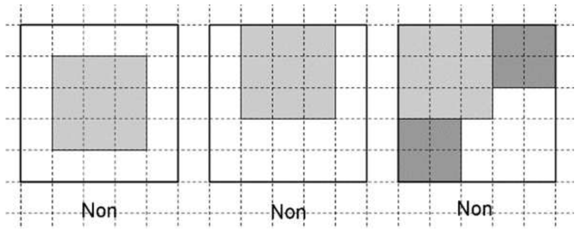
4. *a.* L'algorithme affiche 20 puis 4.
b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N, tel que $u_n = 1$, alors pour tout $n \geq 1, u_n = 1$.
De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M = 4$, alors à partir du rang M, les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.
Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4. L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique.
c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u \neq 1 \; et \; u \neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.
d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

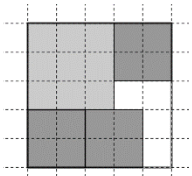
5. *a.* Soit $x = 100a + 10b + c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a \neq 0$). On a :
$$\boldsymbol{x} - f(x) = 100a + 10b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - b) + c(1 - c)$$
Le terme $a(100 - a)$est minimum pour $a = 1$ et son minimum est 99.
Le terme $b(10 - b)$ est positif.
Donc $x - f(x) \geq 99 + c(1 - c)$
On en déduit que $x - f(x) > 0$ et donc que $x - f(x) \geq 1$, car ce nombre est entier.
b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite décroissante… Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.
La propriété $\mathcal{P}$ est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

6. *a.* Il revient au même de montrer l'inégalité proposée que montrer que, pour tout entier $p \geq 4$, $9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1$ (on fait apparaître $10^{p-1} - 1$)
On peut écrire $10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10^1 + 1) + 1$
Dans la parenthèse se trouvent $p - 4$ entiers supérieurs à 1, dont $p - 3$ sont supérieurs à 10. Leur somme est supérieure à $10(p - 3) + 1$. Finalement $10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1 \geq 100p - 289$. Ce dernier terme est supérieur à $9p$ dès que $p > 3$.
b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$. Le successeur de u_n a donc moins de chiffres.
c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

National 2 (série S) 1, 2, 3 … dallez ! Une rédaction possible

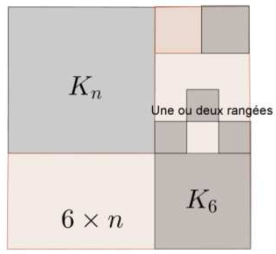
1. *a.* Le carré K_6 peut être pavé avec 4 carrés de taille 3 (ou 9 carrés de taille 2) donc sans carré de taille 1.
b. Si on utilise un carré de taille 3, il occupe nécessairement un coin et il n'est pas possible de paver l'espace restant avec des carrés de taille 2. On ne peut pas non plus n'utiliser que des carrés de taille 2 (L'aire à paver est impaire).



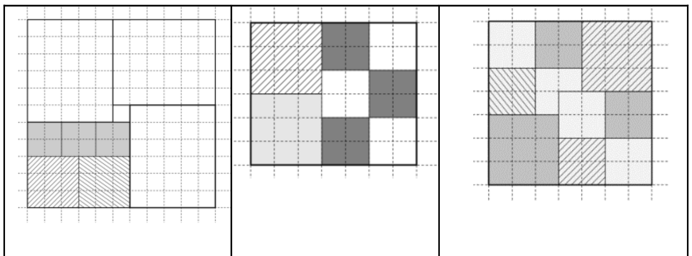


c. La figure de gauche montre un tel pavage.
2. $u(1) = 1$, $u(8) = 0$, $u(9) = 0$: il faut au moins un carré de taille 1 pour couvrir K_1 (et un seul suffit…), K_8 et K_9 peuvent être pavés par 16 carrés de taille 2 et par 9 carrés de taille 3.
3. Le carré K_{2p} peut être pavé par p^2carrés de taille 2 et K_{3p} par p^2carrés de taille 3. Le minimum du nombre de carrés de taille 1 utilisés dans l'un et l'autre cas est 0.

4. *a.* Ajoutant un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair ; ajoutant un multiple de 3 à un non multiple de 3, on obtient un non multiple de 3.
b. Tout rectangle de dimensions n et 6 peut être pavé par des carrés de taille 3 ou 2. En effet, si n est un multiple de 3, deux rangées de pavés taille 3 conviennent, si n est supérieur de 2 à multiple de 3, on complète deux rangées de carrés de taille 3 par trois carrés de taille 2 en largeur, enfin si n est supérieur de 1 à un multiple de 3 (et que n est plus grand que 4), il faudra 6 carrés de taille 2 pour compléter les carrés de taille 3. Le carré K_6 est pavé par des carrés de taille 3.



5. *a.* La figure ci-dessous montre un pavage du rectangle donné et de K_{11}. Cela montre que $u(11) \leq 1$.
b. La figure ci-dessous montre un pavage d'un rectangle de largeur 6 et de longueur 7, puis de K_{13}. Cette figure montre également que $u(13) \leq 1$.
c. Tous les nombres impairs non multiples de 3 strictement supérieurs à 7 s'obtiennent en ajoutant à 11 ou 13 un multiple de 6. D'après la question **4. *b.***, le nombre de carrés de taille 1 nécessaires pour paver des carrés de côté impair non multiple de 3 diminue lorsque le côté augmente. Il reste donc inférieur à 1.



Pavage d'un rectangle 5 × 6 et, par extension, de K_{11}	*Pavage d'un rectangle 6 × 7 (utilisable pour paver K_{13})*	*Pavage de K_7 utilisant 3 carrés de taille 1 (la question n'était pas posée)*

6. *a.* Posons $n = 2p + 1$. Le schéma ci-dessous montre que dans K_{2p+1} chaque ligne de rang pair compte $p + 1$ « 0 » et p « -1 » tandis que chaque ligne de rang impair compte $p + 1$ « 1 » et p « 0 ». La somme des coefficients des deux lignes consécutives est donc 1. Il y a p paires de lignes de la sorte plus la première ligne qui est de rang impair (1). Le total est donc $2p + 1$.

	Colonne 1			…		Colonne 2p+1
Ligne 2q	0	-1	0		-1	0
Ligne 2q-1	1	0	1		0	1

b. La façon dont les coefficients des cases d'un tel carré de taille 3 peuvent se répartir peut être étudiée en observant les quatre positions possibles d'un carré de taille 3 dans un carré de taille 4. Les sommes possibles sont -3, 0 et 3.
c. La même figure sert à étudier ce qu'il advient d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions (il suffit cette fois de considérer les quatre positions possibles d'un carré de taille 2 dans un carré de taille 3). Cette fois la somme des coefficients est constante égale à 0.

	Colonne 2q			
	0	1	0	1
	-1	0	-1	0
Ligne 2p +1	0	1	0	1
Ligne 2p	- 1	0	-1	0

d. La somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 est donc un multiple de 3.
e. On conclut que $u(n)$ n'est nul que pour les carrés de taille paire ou multiple de 3 et égal à 1, au-delà de 11, que pour les carrés de taille impaire et non multiple de 3.
f. $2\,017 = 1 + 4 \times 21 \times 24$. Ce qui montre que $2\,017$ est impair et non multiple de 3, et qui indique comment, à l'image de K_{11} et K_{13} , on peut réaliser un pavage de $K_{2\,017}$ ne contenant qu'un pavé de taille 1.

National 3 (Non S) Boîtes de canelés bordelais : Rédaction possible

1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car 9 + 6 > 10 et 6 +6 > 10. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car 16 + 6 > 20, 12 + 9 > 20, 12 + 2 × 6 > 20, 4 × 6 > 20. En revanche, 12 + 2 × 9 = 30.

2. ***a.*** Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	17	19	20	23	26	29

b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.

c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.

3. ***a.*** Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.

b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.

4. ***a.*** On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.

b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.

c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.

5. ***a.*** On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.

b. Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.

6. On peut réaliser tout total de 1 à 31 (penser au système binaire).

Corrigés de l'épreuve académique (session 2017)

Exercice 1 : CARTE AU TRESOR DANS UN CUBE

I)1) a) $\boldsymbol{dhfffh}$ mène en (1 ; 2 ; 2), donc n'atteint pas le trésor, mais passe par le centre du cube, et rapporte donc 10 points.

b) $\boldsymbol{ddhhff}$ mène en G, donc au trésor, mais ne passe pas par le centre du cube, et rapporte donc exactement 40 points.

c) $\boldsymbol{dhffhd}$ passe par le centre du cube et mène à G ; ainsi, il permet de rapporter le mini-trésor et le trésor, soit un total de $40+10=50$ points.

2) Trois possibilités pour chaque déplacement, donc un total de $\underline{3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6=\mathbf{729}}$ <u>tirages possibles.</u>

3) a) Pour être gagnant, un tirage doit comporter en tout deux « h », deux « d » et deux « f » (dans un ordre indifférent). Donc les tirages gagnants commençant par dd ne sont autres que $hhff$; $ddffhh$; $ddfhfh$; $ddfhhf$; $ddhfhf$; $ddhffh$. **<u>Il y en a donc 6</u>**. Cela se retrouve par les combinaisons : $\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$.

b) De même, les tirages gagnants commençant par df sont :
$dfdfhh$; $dfdhfh$; $dfdhhf$; $dffdhh$; $dffhdh$; $dffhhd$; $dfhhdf$; $dfhhfd$; $dfhdhf$; $dfhdfh$; $dfhfdh$; $dfhfhd$
<u>Il y en a donc 12</u>. Cela se retrouve par les combinaisons : $\binom{4}{2}\times\binom{2}{1}\times\binom{1}{1}$

c) On compte le nombre de tirages comportant deux « h », deux « d » et deux « f » (dans un ordre indifférent) puisque c'est la seule façon de parvenir à G en 6 coups exactement. On trouve au total **<u>90 chemins</u>** ($3\times6=18$ dont les deux premières lettres sont identiques (3 cas) + $6\times12=72$ comportant deux premières lettres distinctes (6 cas)). On retrouve ce résultat par les combinaisons : $\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$.

4) <u>Nombre de tirages passant par le « mini-trésor » et menant au trésor :</u> on cherche, parmi les chemins gagnants, ceux qui passent par le « mini trésor », autrement dit, ceux dont les trois premiers déplacements ne comportent aucune répétition (la seule façon d'arriver au « mini trésor » est de faire un déplacement exactement de chaque type, consécutivement, donc 3 déplacements distincts), ce qui fait 6 possibilités pour le premier groupe de trois lettres et 6 possibilités pour le second groupe de trois lettres (il reste un déplacement de chaque type, soit trois déplacements distincts là aussi), soit un total de $\underline{6\times6=\mathbf{36}}$ <u>**tirages**</u> rapportant 50 points.

5) <u>Nombre de tirages passant par le « mini-trésor » sans mener au trésor :</u> Comme on l'a expliqué dans la question précédente, les trois premiers déplacements sont nécessairement distincts ; le nombre total de tirages permettant de s'emparer du mini-trésor (sans tenir compte de la suite) est donc $6\times3\times3\times3=\mathbf{162}$ (6 combinaisons possibles pour les trois premiers déplacements et 3 possibilités pour chacun des déplacements suivants, qui sont quelconques) . Donc il reste : $\underline{162-36=\mathbf{126}}$ <u>**tirages**</u> permettant de remporter le « mini trésor » sans pour autant s'emparer du trésor.

II) 1) $P(X=50 \; ou \; X=40)=\frac{90}{729}\approx0{,}123=\mathbf{12{,}3}\%$ **2)** $P(X=50)=\frac{36}{729}\approx0{,}049=\mathbf{4{,}9}\%$

3) $P(X=40)=\frac{90-36}{729}=\frac{54}{729}\approx0{,}074=\mathbf{7{,}4}\%$ **4)** $P(X=10)=\frac{126}{729}\approx0{,}173=\mathbf{17{,}3}\%$

5) $P(X=0)=\frac{729-(90-36)-162}{729}\approx0{,}704=\mathbf{70{,}4}\%$

III) 1) $E(X)=50\times P(X=50)+40\times P(X=40)+10\times P(X=10)+0\times P(X=0)$

$$\approx 50\times0{,}049+40\times\frac{54}{729}+10\times\frac{162-36}{729}+0\times0{,}704$$
$$\approx 50\times0{,}049+40\times0{,}074+10\times0{,}173=\mathbf{7{,}14}$$

Une partie de ce jeu rapporte donc en moyenne <u>**7, 14 points**</u> .

2) $\frac{220}{7{,}14}\approx30{,}8$; il faudra donc 31 parties à Théo, en moyenne, pour accéder au niveau suivant, soit **<u>62 minutes</u>** de jeu.

Exercice 2 : « Carrément pavé »

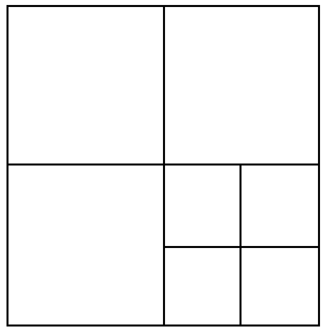
1. Le minimum est 4 pièces.

2. Supposons que 5 pièces recouvrent le plateau. Une même pièce ne peut pas occuper 2 sommets du plateau. Considérons les 4 pièces occupant les sommets :

- soit ces pièces sont des quarts de plateau. Mais alors elles ne laisseraient aucun espace libre pour la 5° pièce.

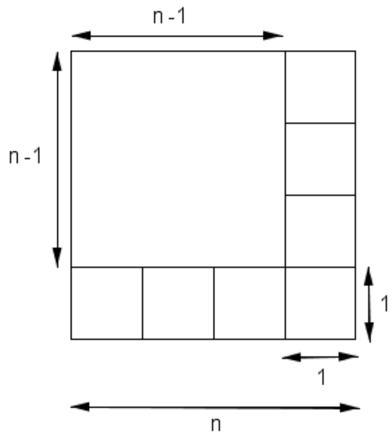
- soit elles ne sont pas des quarts de plateau. Mais alors l'espace restant ne peut pas être un carré.

3. Pour 9, il suffit de recouvrir par 3x3=9 carrés identiques. Pour 6, il suffit de regrouper 4 carrés en un seul dans la configuration précédente. Pour 7, on peut par exemple considérer la configuration ci-contre :



4.a. $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$

b. Il suffit de diviser le plateau en n^2 carrés de côté 1, puis de regrouper $(n-1)^2$ pièces parmi elles pour former une seule pièce carrée de côté $n-1$. A cette pièce, on ajoute les $n + n - 1 = 2n - 1$ pièces de côté 1 restantes pour former un ensemble de $2n - 1 + 1 = 2n$ pièces.



c. Il suffit dans la configuration précédente de subdiviser une pièce carrée en quatre pièces carrées identiques.

d. Il suffit de prendre n=6 dans la question b.

e. Il suffit de prendre n=5 dans la question c.

5. On peut montrer que des carrés de côté 1, 2, 3 et 4 cm conviennent ; le plateau a donc une largeur de 11 cm. On peut aussi résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues : en notant *x* le côté de la plus grande pièce, y le côté d'un carré hachuré, z le côté d'un carré blanc et c le côté du plateau, on obtient les équations suivantes :

$2x + y = c$

$z + 1 = y$

$y + 1 = x$

$2y + 2z + 1 = c$

La résolution du système fournit x = 4 ; y = 3 ; z = 2 ; c = 11.

Annexes

Liens

- Bulletin Officiel de l'Education Nationale n°41 du 5 novembre 2015 – Actions éducatives – Les Olympiades nationales de mathématiques
  http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94681

- Édu**Scol** – Les Olympiades nationales de mathématiques
  http://eduscol.education.fr/cid46901/olympiades-nationales-de-mathematiques.html

- Site pédagogique disciplinaire de mathématiques de l'académie de Nice
  http://www.ac-nice.fr/maths/mathv2/

- L'association Animath - Association pour l'animation mathématique
  IHP, 11-13 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris Cedex 05 France
  Tél : + 33 1 44 27 66 70
  Site : www.animath.fr ; Mel : contact@animath.fr

Pistes pour s'entraîner

- **Au sein de l'établissement** (BOEN n°41 du 5 novembre 2015)

« S'inscrivant pleinement dans la Stratégie mathématiques, annoncée le 4 décembre 2014 par la ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, la démarche des Olympiades stimule chez les élèves l'initiative, le goût de la recherche et, pendant toute la phase d'entraînement à la compétition, le travail collectif, la production écrite ainsi que la restitution orale. Cette dynamique offre l'occasion d'aborder des problèmes mathématiques de manière ouverte, en autorisant des aperçus originaux, en utilisant toutes les ressources des programmes – en particulier l'algorithmique – et en soulignant le lien entre les mathématiques et les autres sciences. Un emploi judicieux et raisonné des **heures d'accompagnement personnalisé**, de même que **l'ouverture d'ateliers mathématiques dans les lycées** permettront une préparation optimale de l'épreuve. »

- **Animath**

Animath soutient les clubs et ateliers de mathématiques qui fonctionnent dans les lycées et les collèges et s'efforce de créer des liens entre eux, notamment par l'intermédiaire du site web : www.animath.fr . Elle participe à la formation des enseignants pour ces activités, par des universités d'été, stages de formation, etc.

- **Annales des Olympiades**

- Site de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)
www.apmep.fr

- Site de l'Association Animath www.animath.fr

- Site de l'académie de Nice pour les sujets académiques (et nationaux) et les corrigés
http://www.ac-nice.fr/maths/mathv2/

Conclusion

En 2017, nous avons le plaisir de compter 50% des établissements de l'académie de Nice et Monaco qui ont présenté des élèves aux Olympiades académiques. Nous espérons une participation encore plus grande en 2018.

Concernant le nombre de candidats inscrits aux épreuves, nous nous réjouissons d'une participation en forte hausse avec près de 38% de candidats supplémentaires par rapport à l'édition 2016.

Nous constatons enfin que plus du tiers des candidats sont des filles. Notre objectif est d'atteindre la parité.

Nous espérons que la session 2018 verra un nombre encore plus important de candidats.

Les IA-IPR de mathématiques de l'académie de Nice

Pour tout renseignement, merci de contacter :

Clarisse FIOL, IA-IPR de mathématiques,
coordinatrice du concours
clarisse.fiol@ac-nice.fr

Adresse postale : Rectorat de Nice
Bureau des IA-IPR
53, avenue Cap de Croix
06181 NICE CEDEX 2
Secrétariat de l'Inspection : 04 93 53 71 50/51
Courriel du secrétariat : ipr-ia@ac-nice.fr