Ex2 (Le défi de Léonard) : Corrigé (série S)

A

x	9	10	11	12	13	14	15	16
x - 5	4	5	6	7	8	9	10	11
$x (x – 5)$	36	50	66	84	104	126	150	176
$x (x – 5)$+1	37	51	67	85	105	127	151	177

En testant tous les entiers x compris entre 9 et 16 , nous trouvons quatre nombres premiers : 37 , 67 , 127 , 151.

B

1. En complétant un tableau du même type qu'au 1 , on trouve sur la dernière ligne 38,52,...,178.
   Aucun de ces nombres n'est premier.
   On peut également raisonner de façon plus générale :
   En remarquant que $x^2 – 5x + 2 = x (x – 5) + 2$, et que les entiers x et x - 5 sont de parités différentes, on peut conclure que l'entier $x (x – 5) + 2$ est toujours pair (et différent de 2).
   Il ne peut donc être premier.

2. On remarque que $x^2 – 5x + c = x (x – 5) + c$
   Or les entiers x et x - 5 sont de parités différentes donc l'entier $x (x – 5) + c$ est toujours pair.
   Il ne peut donc être premier que s'il vaut 2 (cela se produit pour x=0 ou x=5).

C

1. - si $x = 3k$ alors $x^2 – 5x + 15 = (3k)^2 -5(3k) + 15 = 3(3k^2 – 5k + 5)$.
     Quelle que soit la valeur de k , l'entier $3k^2 – 5k + 5$ est différent de 1.
     Donc $x^2 – 5x + 15$ sera toujours un multiple de 3 différent de 3 , donc il n'est pas premier.

   - si $x = 3k + 2$ alors $x^2 – 5x + 15 = (3k + 2)^2 -5(3k +2) + 15 = 9k^2 + 12k + 4 – 15k – 10 + 15$
     $= 3(3k^2 – k + 3)$.
     Quelle que soit la valeur de k , l'entier $3k^2 – k + 3$ est différent de 1.
     Donc $x^2 – 5x + 15$ sera toujours un multiple de 3 différent de 3 , donc il n'est pas premier.

2. Tout entier peut s'écrire sous une des formes 3k , 3k+1 , 3k+2 avec k entier.
   D'après la question 1 , la seule forme possible pour x est donc 3k+1.

D

1. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMB rectangle en M : $MO^2 + MB^2 = OB^2$

   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H : $MH^2 + OH^2 = MO^2$
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BHM rectangle en H : $MH^2 + HB^2 = MB^2$
   En remplaçant dans l'égalité (*) on obtient :
   $$MH^2 + OH^2 + MH^2 + HB^2 = OB^2$$
   $$2\ MH^2 = OB^2 – OH^2 – HB^2$$
   $$2\ MH^2 = (OH + HB)^2 – OH^2 – HB^2$$
   $$2\ MH^2 = 2OH.HB$$
   $$MH^2 = OH.HB$$
   On a bien retrouvé les deux égalités établies par Léonard.

2.a. $OH.HB = OH(OB – OH) = x(5 – x)$

b. En choisissant $MH = 2$, la relation $MH^2 = OH.HB$ équivaut à $MH^2 = OH.(OB – OH)$
qui équivaut à $x(5 – x) = 2^2$,
soit à $x^2 – 5x + 11 = 7$.

3. Les solutions de l'équation sont les abscisses des points M tels que MH = 2.
   Il suffit donc de tracer la droite (d) parallèle à (OB) à une distance de 2 unités de (OB) et de lire les abscisses des points d'intersection de (d) avec le cercle.