De l'arithmétique lunatique

Entrons dans un monde étrange où les additions et les multiplications sont différentes de celles que nous avons apprises à l'école primaire...

Dans ce sujet, les nombres considérés seront des nombres entiers positifs ou nuls.

A Définitions et premiers exemples

Définitions	L'**addition lunatique** $\oplus$ consiste à poser l'addition comme en classe de primaire. Puis pour l'effectuer, on prend dans chaque colonne, le chiffre le plus grand.	La **multiplication lunatique** $\otimes$ se pose aussi, au départ, comme en primaire. Puis, lors du calcul, les multiplications intermédiaires consistent à prendre le plus petit des deux chiffres, puis pour les additions, en utilisant l'addition lunatique.
Exemples à seul chiffre	$3 \oplus 5 = 5$ $\quad 4 \oplus 4 = 4$ $\quad 3 \oplus 4 \oplus 5 = 5$	$2 \otimes 8 = 2$ $\quad 7 \otimes 7 = 7$
Exemples à plusieurs chiffres	$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ \oplus & & 6 & 7 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 5 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & 4 & 1 & 7 \\ & & & \otimes & 5 & 8 & 3 \\ \hline & & & 2 & 3 & 1 & 3 \\ \oplus & & 2 & 4 & 1 & 7 & \cdot \\ \oplus & 2 & 4 & 1 & 5 & \cdot & \cdot \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$

1. *Calculer* $1914 \oplus 2018$. : $1914 \oplus 2018 = 2918$
2. *Calculer* $1789 \otimes 732$ *puis* $732 \otimes 1789$. *Que remarque-t-on ?*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 7 & 8 & 9 \\ & & & \otimes & 7 & 3 & 2 \\ \hline & & & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \oplus & & 1 & 3 & 3 & 3 & \cdot \\ \oplus & 1 & 7 & 7 & 7 & \cdot & \cdot \\ \hline & 1 & 7 & 7 & 7 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & & 7 & 3 & 2 \\ & & \otimes & 1 & 7 & 8 & 9 \\ \hline & & & & 7 & 3 & 2 \\ & & & 7 & 3 & 2 & \cdot \\ \oplus & & 7 & 3 & 2 & \cdot & \cdot \\ \oplus & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & 1 & 7 & 7 & 7 & 3 & 2 \end{array}$$

On remarque que
$1789 \otimes 732 = 732 \otimes 1789$

3. *Calculer* $43 \otimes (25 \oplus 71)$ *et* $(43 \otimes 25) \oplus (43 \otimes 71)$. *Que remarque-t-on ?* On a $25 \oplus 71 = 75$ or

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 3 \\ \otimes & & 7 & 5 \\ \hline & & 4 & 3 \\ \oplus & 4 & 3 & \cdot \\ \hline & 4 & 4 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 4 & 3 \\ \otimes & & 2 & 5 \\ \hline & & 4 & 3 \\ \oplus & 2 & 2 & \cdot \\ \hline & 2 & 4 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 4 & 3 \\ \otimes & & 7 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ \oplus & 4 & 3 & \cdot \\ \hline & 4 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 2 & 4 & 3 \\ \oplus & 4 & 3 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 3 \end{array}$$

Donc $43 \otimes (25 \oplus 71) = (43 \otimes 25) \oplus (43 \otimes 71)$

4. *Trouver un α entier tel que pour tout entier n, $\alpha \oplus n = n$.* : $\alpha = 0$ convient (le plus petit des entiers positifs).
5. Trouver un nombre β entier tel que pour tout entier n, $\beta \otimes n = n$.
   $\beta = 9$ convient car il est le plus grand des nombres à un chiffre.
6. *On a vu que* $2417 \otimes 583 = 244573$. *Trouver deux autres entiers m et n tels que* $m \otimes n = 244573$ *en utilisant, dans l'écriture de m et n, seulement les chiffres du résultat* 244573, *c'est-à-dire 2, 3, 4, 5 et 7.*
   Une façon de procéder est de repérer les chiffres non désirés et de les remplacer.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & 4 & 1 & 7 \\ & & & \otimes & 5 & 8 & 3 \\ \hline & & & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & & 2 & 4 & 1 & 7 & \cdot \\ \oplus & 2 & 4 & 1 & 5 & \cdot & \cdot \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 2 & 4 & 2 & 7 \\ & & & \otimes & 5 & 7 & 3 \\ \hline & & & 2 & 3 & 2 & 3 \\ & & 2 & 4 & 2 & 7 & \cdot \\ \oplus & 2 & 4 & 2 & 5 & \cdot & \cdot \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

B Des surprises lunatiques

1) Nombres pairs lunatiques

Soit n un entier.

a. *Calculer* $n \oplus n$. On a $n \oplus n = n$ qui se démontre trivialement en superposant les chiffres.

b. *A-t-on* $n \oplus n = 2 \otimes n$ *?* Non ! Exhibons un contre-exemple : $2 \otimes 3 = 2$ or $3 \oplus 3 = 3$.

2) Équations lunatiques

Déterminer, s'ils existent les entiers n tels que :

a. $75 \oplus n = 76$: les entiers 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66 et 76 sont les solutions.

b. $12 \otimes n = 26$: 6 est le chiffre des unités de 26 que l'on ne peut pas atteindre avec 2. Pas de solution.

c. $16 \otimes n = 165$: le chiffre des unités de n doit être 5, celui des dizaines doit être supérieur à 6. Donc les solutions sont 65, 75, 85 et 95.

3) Carrés lunatiques

Un carré lunatique est le produit lunatique d'un nombre par lui-même.
Exemple : le carré lunatique de 4 *est* 4 *car* $4 \otimes 4 = 4$
Donner la liste des carrés lunatiques de n pour n allant de 0 à 20.

Comme nous montre l'exemple, les carrés des nombres entiers de 0 à 9 sont eux-mêmes. De plus $10 \otimes 10 = 100$
Pour les entiers de 11 à 19, que nous allons écrire $1a$ avec a entier de 1 à 9.
$1a \otimes 1a = 11a$
Enfin $20 \otimes 20 = 200$

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 0 \\ \otimes & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & \cdot \\ \hline & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & a \\ \otimes & & 1 & a \\ \hline & & 1 & a \\ \oplus & 1 & 1 & \cdot \\ \hline & 1 & 1 & a \end{array}$$

C Nombres premiers lunatiques

Un nombre entier positif est un nombre premier lunatique s'il est différent de 9 et s'il est seulement le produit lunatique de 9 avec lui-même.

1. *Prouver que 19 est le plus petit nombre premier lunatique.*

   Les nombres entiers de 0 à 9 sont égaux à leurs carrés donc ne sont pas premiers lunatiques.

   $10 = 10 \otimes 1$ n'est pas premier lunatique.

   Les nombres de 11 à 19 peuvent être obtenus en les multipliant lunatiquement avec leur chiffre des unités, donc ceux de 11 à 18 ne sont pas premiers lunatiques.

   Pour 19, on a bien $19 \otimes 9 = 19$. Mais est-ce la seule façon d'obtenir 19 ?

   Pour obtenir 19 par une multiplication, le chiffre des unités des deux facteurs lunatiques doit être 9. Et on ne peut pas multiplier des nombres à plus de trois chiffres pour obtenir un nombre à 2 chiffres, ni multiplier des nombres supérieurs à 19. Donc les seuls nombres entiers candidats sont 9 et 19. 19 est donc le plus petit des nombres premiers lunatiques.

2. *Quel est le suivant ?*

   $20 \otimes 1 = 20 \otimes 2 = 20$ et $21 = 21 \otimes 1$. Donc 20 et 21 ne sont pas premiers lunatiques.

   Les nombres de 22 à 29 peuvent être obtenus en les multipliant lunatiquement avec leur chiffre des unités, donc ceux de 22 à 28 ne sont pas premiers lunatiques.

   Pour 29, on peut reprendre la même argumentation que pour 19. 29 est le second nombre premier lunatique.

Pour information voici une liste de nombres premiers lunatiques :

19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 109, 209, 219, 309, 319, 329, 409, 419, 429, 439, 509, 519, 529, 539, 549, 609, 619, 629, 639,…

D Supplément : implémentation de $\oplus$ et $\otimes$ avec Mathematica

Soient a et b deux nombres à 1 chiffre chacun, on définit $a \oplus b = \text{Max}(a, b)$ et $a \otimes b = \min(a, b)$.
Soient m et n deux entiers positifs écris en base 10 : $m = \sum_{i=0}^{k-1} m_i 10^i$ et $n = \sum_{i=0}^{l-1} n_i 10^i$. On a

$$n \oplus m = \sum_{i=0}^{\text{Max}(k,l)-1} (m_i \oplus n_i) 10^i \text{ et } n \otimes m = \sum_{i=0}^{k+l-2} p_i 10^i \text{ où } p_i = \bigoplus_{r+s=i} m_r \otimes n_s$$

Ce qui donne avec Mathematica[1] :

```
In[6]:= SumDis[n_, m_] :=
  (
   a = Max[IntegerLength[n], IntegerLength[m]];
       |ma··  |longueur d'entier     |longueur d'entier
   b = IntegerDigits[n, 10, a];
       |chiffres d'entier
   c = IntegerDigits[m, 10, a];
       |chiffres d'entier
   e = Table[Max[b[[i]], c[[i]]], {i, 1, a}];
       |table |maximum
   FromDigits[e]
   |depuis chiffres
  )

In[7]:= SumDis[12853, 6729]

Out[7]= 16859

In[10]:= ProdDis[n_, m_] :=
  (
   k = IntegerLength[n];
       |longueur d'entier
   l = IntegerLength[m];
       |longueur d'entier
   a = IntegerDigits[n, 10];
       |chiffres d'entier
   b = IntegerDigits[m, 10];
       |chiffres d'entier
   c = Table[Min[a[[i]], b[[j]]], {j, l, 1, -1}, {i, 1, k}];
       |table |minimum
   d = Table[FromDigits[c[[i]]] * 10 ^ (i - 1), {i, l}];
       |table |depuis chiffres
   e = Table[IntegerDigits[d[[i]], 10, k + l - 1], {i, l}];
       |table |chiffres d'entier
   f = Table[Max[e[[All, i]]], {i, k + l - 1}];
       |table |maxim··· |tout

   FromDigits[f]
   |depuis chiffres
  )

In[11]:= ProdDis[247, 843]

Out[11]= 24743
```

[2] [3]

1. WOLFRAM MATHEMATICA, *Computation meets Knowlege*
2. *Aritmética dismal*, Alberto Rubén Segura.
3. *Dismal Arithmetic*, David Applegate, Marc LeBrun, et N. J. A. Sloane.