Rédaction possible pour « Ensembles arithmétiques »

1. *a.* S_1 est un EA, car chaque fois qu'on considère deux éléments, le troisième complète l'ensemble S_1 et 1 est la moyenne arithmétique de 0 et 2. Pour S_2, 0 et 3 n'ont pas de complément ad hoc, pour S_3 ce sont 1 et 4. Les triplets $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right),\left(\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}\right),\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)$ sont constitués de deux éléments de S_4 et de leur moyenne arithmétique. Chaque élément de S_4 y figure accompagné des quatre autres.

b. Si un ensemble a deux éléments a et b, il faudrait pour qu'il soit arithmétique que $\frac{a+a}{2}=b$ ou $\frac{a+b}{2}=a$ deux égalités qui conduisent à $a=b$, mais l'ensemble a deux éléments. Les singletons sont, quant à eux, des EA, puisque pour chaque couple d'éléments de S est de la forme (a,a) et que $c=a$ convient.

c. L'ensemble $\left\{0,\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},2\right\}$ convient. En effet, les triplets $\left(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$, $(0,1,2)$, $\left(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2\right)$ font tous apparaître deux nombre et leur moyenne, et chacun y figure accompagné des quatre autres.

2. *a.* Si a est la moyenne de b et c, alors $a=\frac{b+c}{2}$ et donc $c=2a-b$. Par symétrie, on doit aussi essayer $d=2b-a$.

b. Conformément à la question précédente, on doit à chaque étape se demander si (S[i]+S[j])/2 ou 2*S[i]−S[j], ou 2*S[j]−S[i] appartiennent à S. Dès qu'on a prouvé qu'aucun des trois n'appartient à S, on peut conclure. Cela fait au maximum $3n^2$ opérations (la fonction Appartient (r,S) dissimule les comparaisons du résultat de chaque calcul à la liste des éléments de S). Ci-contre, les ajouts à réaliser (sur fond grisé).

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n
      Pour j de 1 à n
            Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
                      or
                      Appartient ((2*S[i]−S[j]),S)
                      or
                      Appartient ((2*S[j]−S[i]),S))
                 Resultat← Faux
  Renvoyer(Resultat)
```

c. Avec ce programme, on essaie le couple (j,i) et le couple (i,j). On essaie aussi les couples (i,i). De plus, on ne s'échappe des boucles qu'après avoir tout testé, quand le premier Faux fait tout échouer. D'où les aménagements ci-après.

3. On peut commencer par vérifier que les $\frac{2(a-m)}{M-m}$ sont compris entre 0 et 2. Cela provient du fait que $0\leq a-m\leq M-m.$ On peut ensuite vérifier que 0, 1 et 2 sont éléments de S'. Il suffit pour cela de donner à a les valeurs $m, \frac{M+m}{2}$ et M. $\frac{M+m}{2}$ est en effet un élément de S, car m et Mne peuvent être ni l'un ni l'autre la moyenne de deux éléments de S. Pour vérifier la propriété donnée dans la définition, on prend deux éléments de S' (ce qui revient à prendre les deux éléments de S dont ils sont les images), $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et $\frac{2(b-m)}{M-m}$, leur moyenne arithmétique $\frac{2\left(\frac{a+b}{2}-m\right)}{M-m}$, le symétrique de $\frac{2(b-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et le symétrique de $\frac{2(a-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(b-m)}{M-m}$, qui sont $\frac{2(2a-b-m)}{M-m}$ et $\frac{2(2b-a-m)}{M-m}$. Comme S est un EA, un des trois nombres $\frac{a+b}{2}$, $2a-b$ et $2b-a$ appartient à S, donc une de leurs trois images à S'.

```
fonction TesterViteEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n-1
      Pour j de i+1 à n
            Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
                      or
                      Appartient ((2*S[i]−S[j]),S)
                      or
                      Appartient ((2*S[j]−S[i]),S))
                 Resultat← Faux
                 Renvoyer (Resultat)
  Renvoyer(Resultat)
```

4. Si x est élément de S tel que $0<x<1$, alors $x-(2-x)=2x-2$ n'appartient pas à S. $2+(2-x)=4-x$ n'appartient pas à S. La seule possibilité pour compléter la paire $\{x,2\}$ est donc $\frac{x+2}{2}$.

Si $1<x<2$, alors $0-x$ n'appartient pas à S et $2x$ non plus. La seule possibilité pour compléter la paire $\{0,x\}$ est $\frac{x}{2}$.

Remarquons que si S contient 0 et 2, il contient aussi 1, seule possibilité pour compléter la paire $\{0,2\}$. L'ensemble S a donc trois éléments au moins et on vient de voir que s'il en possède un quatrième, il en a au moins un cinquième.

Nous n'avons raisonné que sur des ensembles contenus dans [0, 2], mais la question **3.** nous a permis de ramener le problème à de tels ensembles. Il n'y a donc pas d'EA à 4 éléments.

5. *a.* On suppose qu'il existe dans S un élément a_1 tel que $0<a_1<\frac{2}{3}$. La question **4.** Nous a permis de montrer que $\frac{a_1+2}{2}$ appartient à S. Or, $1<\frac{a_1+2}{2}<2$. La question **4.** conduit à $\frac{a_1+2}{4}\in S$, mais ce dernier nombre est strictement inférieur à $\frac{2}{3}$ et strictement supérieur à a_1. Donc, si S contient un élément inférieur à $\frac{2}{3}$, il en contient un plus grand et aussi inférieur à $\frac{2}{3}$. Il en contient ainsi 3, 4, etc. une infinité, mais l'hypothèse précise que S est un ensemble à n éléments. D'onc S ne contient aucun nombre inférieur à $\frac{2}{3}$.

b. Si S contient un nombre a strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, d'après la question **4.** le nombre $\frac{a+2}{2}$ appartient à S et est supérieur à 1. La question **4.** Intervient encore : $\frac{a+2}{4}$ appartient à S et ce nombre est supérieur à $\frac{2}{3}$ et inférieur à 1. La comparaison entre a et $\frac{a+2}{4}$ donne : $a-\frac{a+2}{4}=\frac{3a-2}{4}$ et comme $a>\frac{2}{3}$ on conclut que $\frac{a+2}{4}<a$. Donc, si l'intervalle $\left]\frac{2}{3},1\right[$ contient un élément de S, il en contient un autre plus petit. On termine le raisonnement comme au ***a.***

c. On déduit de ce qui précède que si S contient un élément de]0, 1[, cet élément ne peut être que $\frac{2}{3}$. L'ensemble S contient alors $\frac{4}{3}$ (moyenne entre 2 et $\frac{2}{3}$). S'il contenait un autre élément que $\frac{4}{3}$ entre 1 et 2, alors d'après la question **3.**, il contiendrait sa moitié, comprise entre 0 et 1, qui ne peut être que $\frac{2}{3}$. On a dit que la réduction à [0,2] ne diminuait pas la généralité du problème, donc 5 est un maximum pour le nombre d'éléments de S.

6. Seuls 3 et 5 sont des effectifs convenables pour un EA.