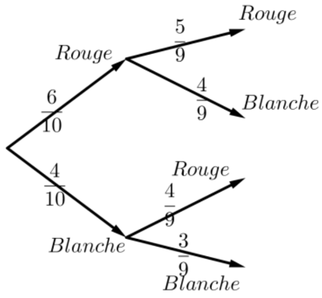
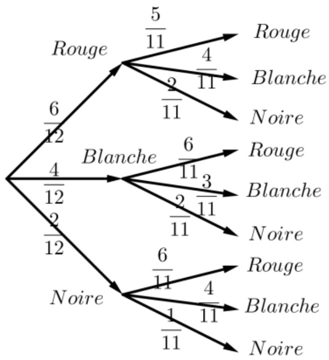
Rédaction possible pour « Boules de même couleur »

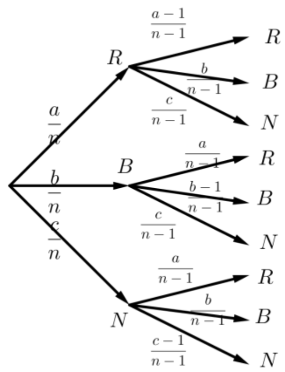




1. ***a.*** et ***b.*** Les deux graphes ci-contre permettent de faire les comptes :
Lorsque l'urne contient 4 boules blanches et 6 rouges,
$P(G) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$
Lorsque l'urne contient 4 boules blanches, 6 rouges et 2 noires, l'événement G (ce n'est pas le même que ci-dessus…) a pour probabilité :
$P(G) = \frac{6}{12} \times \frac{5}{11} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{3}$

2. ***a.*** On peut reprendre le premier graphe en remplaçant 4 par x et 10 par $(6+x)$. On obtient la probabilité de G (c'est encore un autre G) :
$P(G) = \frac{6}{(6+x)} \times \frac{5}{(5+x)} + \frac{x}{(6+x)} \times \frac{x-1}{(5+x)}$
b. L'équation $P(G) = \frac{1}{2}$ s'écrit $2x(x-1) + 60 = (x+6)(x+5)$, ou encore $x^2 - 13x + 30 = 0$, c'est-à-dire $(x-3)(x-10) = 0$ Le jeu est donc équitable si l'urne contient au départ 3 boules blanches ou 10 boules blanches.
Remarque en passant : *on pourrait s'étonner que dans la réponse à cette question ne figure pas le cas d'égalité entre l'effectif des boules blanches et des boules rouges. Le cas d'égalité, effectif n boules de chaque couleur ($n \geq 2$, quand même), conduit à $P(G) = \frac{n-1}{2n-1}$, quantité légèrement inférieure à $\frac{1}{2}$.*

3. ***a.*** L'urne contient a boules rouges et b boules blanches. La probabilité de l'événement G (encore un autre G) s'écrit :
$P(G) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b-1} = \frac{a^2+b^2-a-b}{(a+b)(a+b-1)}$.
$P(G) = \frac{1}{2}$ lorsque $2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b = a^2 + b^2 + 2ab - a - b$, ce qui s'écrit encore $a^2 + b^2 - 2ab = a + b$, c'est-à-dire finalement $(a-b)^2 = n$.
b. On cherche donc des entiers a, b et p vérifiant : $\begin{cases} a + b = p^2 \\ a - b = p \end{cases}$. On obtiendrait donc, sous réserve d'existence, $a = \frac{p^2+p}{2}$ et $b = \frac{p^2-p}{2}$. L'équation $p^2 + p - 2a = 0$ doit posséder des solutions entières supérieures à 2. Comme ses solutions positives éventuelles s'écrivent $= \frac{\sqrt{8a+1}}{2} - \frac{1}{2}$, une condition nécessaire est que $8a + 1$ soit le carré d'un entier impair. En posant $8a + 1 = (2m+1)^2$, on obtient $p = m$ et $a = \frac{p(p+1)}{2}$. On doit donc chercher a parmi les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc. Et comme $= a - p$, si on pose $8a + 1 = (2p+1)^2$, il vient $b = \frac{p(p+1)}{2} - p = \frac{(p-1)p}{2}$. a et b sont donc deux nombres triangulaires successifs. Les couples (a, b) sont, le premier, (3, 1) (possible si on admet qu'il peut n'y avoir qu'une seule boule d'une des deux couleurs…), puis (6, 3), (10, 6), (15, 10), (21, 15), (28, 21), etc.



4. ***a.*** Le graphe est analogue à celui de la question **1.** Dans le cas de trois couleurs. La probabilité $P(G)$ se calcule de la même façon. $P(G) = \frac{a}{n} \times \frac{a-1}{n-1} + \frac{b}{n} \times \frac{b-1}{n-1} + \frac{c}{n} \times \frac{c-1}{n-1}$
(on a posé $a + b + c = n$). $P(G) = \frac{a^2+b^2+c^2-n}{n(n-1)}$
On suppose ici que $n = 13$. Une condition nécessaire pour que le jeu soit équitable s'écrit $2(a^2 + b^2 + c^2) = 13^2 + 13$, soit $a^2 + b^2 + c^2 = 91$
Remarque : *cette condition est nécessaire, mais on n'a pas vérifié l'existence* ***d'entiers*** *a, b, c dont la somme soit 13 et la somme des carrés 91.*
De $\begin{cases} a + b + c = 13 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 91 \end{cases}$ on déduit $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) = 78$. Les nombres entiers positifs figurant dans cette somme sont à choisir parmi 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72 (0 correspond au cas où une couleur est représentée par une seule boule, cas évoqué plus haut). La seule possibilité est {0, 6, 72}, qui correspond à $(a, b, c) = (1, 3, 9)$ aux permutations près.
b. Si le triplet (x, y, z) conduit à une situation d'équité, alors $\frac{x^2+y^2+z^2-x-y-z}{(x+y+z)(x+y+z-1)} = \frac{1}{2}$. Cette condition s'écrit :
$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 2y - 2z = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - x - y - z$ ou encore :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - x - y - z = 0$. Comme $x^2 + y^2 - 2xy = x + y$ (le tirage à deux couleurs d'effectifs x et y est «équitable), on obtient $z^2 - 2zx - 2yz - z = 0$. On écarte le cas $z = 0$ (il y a vraiment trois couleurs) et on obtient $z = 2x + 2y + 1$.
c. On complète les couples fournissant un jeu équitable à deux couleurs par le troisième effectif, les premiers triplets obtenus sont : (3, 1, 11), (6, 3, 19), (10, 6, 33), etc. Attention, cette fois les permutations ne conduisent pas à d'autres solutions, car, par exemple, le couple (33,6) ne fait pas partie de ceux qui donnent une partie équitable à deux couleurs.

5. La formule donnant $P(G)$ pour trois couleurs peut être étendue à m couleurs avec les effectifs 1, 3, 9, … 3^{m-1}. Pour cela, il faut d'abord calculer l'effectif total : $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{m-1} = \frac{3^m-1}{2}$. Au numérateur du quotient donnant $P(G)$ on trouve :
$N = 3 \times 2 + 9 \times 8 + \cdots + 3^{m-2} \times (3^{m-2} - 1) + 3^{m-1} \times (3^{m-1} - 1)$, qui peut aussi s'écrire :
$N = 3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2m-2} - 3^0 - 3^1 - 3^2 - \cdots - 3^{m-1}$ (on retrouve la somme des carrés moins la somme).
$$N = \frac{1 - 3^{2m}}{1 - 3^2} - \frac{3^m - 1}{2} = \frac{(3^m - 1) \times 3 \times (3^{m-1})}{8}$$
Le produit $\frac{3^m-1}{2} \times \left(\frac{3^m-1}{2} - 1\right)$ s'écrit aussi $\frac{3^m-1}{2} \times 3 \times \frac{3^{m-1}-1}{2}$ et on voit que leur quotient $P(G) = \frac{1}{2}$

Tous les jeux respectant cette distribution sont équitables.