Olympiades nationales de mathématiques 2018

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Tri naïf*) et 2 (*Le défi de Léonard*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Tri naïf*) et 3 (*De l'arithmétique lunatique*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Tri naïf

Prérequis : Soit n un entier strictement positif.

On admet que $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

En informatique, il est courant d'avoir besoin de trier des données. Nous nous intéressons au tri de données numériques entières, c'est-à-dire au fait de trier des listes données de nombres entiers. Une liste est une suite finie de nombres. Une liste de n éléments est appelée une n-liste.

Par exemple, $L = (5\ ;\ -2\ ;\ 0\ ;\ 5)$ est une 4-liste . Sa version « ordonnée » serait $L = (-2\ ;\ 0\ ;\ 5\ ;\ 5)$.

Voici un algorithme qui permet, à partir d'une liste L de nombres donnée, d'obtenir son minimum min . Pour la suite de l'exercice, on notera $\min(L)$ le minimum d'une liste L, ainsi obtenu dans la variable min à la fin de l'algorithme.

```
Saisir L
x ← premier élément de L
min ← x
Tant que x n'est pas le dernier élément de L Faire
    x ← élément suivant de L
    Si x < min alors
         min ← x
    Fin Si
Fin Tant que
```

Remarque : *l'instruction $a \leftarrow b$ signifie que la valeur de b est stockée dans la variable.*

1) Faire tourner cet algorithme avec la 8-liste $L = (5; 9; -10; 2; 3; -15; 120; 1)$.
Pour cela, recopier le tableau ci-contre, et le compléter au fur et à mesure de l'exécution de l'algorithme. Vous munirez le tableau du nombre de lignes nécessaires.

x	min
5	5
…	…

Préciser quelle est la valeur contenue dans la variable min lorsque l'exécution de l'algorithme se termine.

2) *Le fait de se demander lequel de deux nombres donnés est le plus petit ou le plus grand est appelé une* ***comparaison****.*

a) Combien opère-t-on de comparaisons sur une 8-liste pour la recherche de son minimum ?

b) Combien opère-t-on de comparaisons sur une n-liste, avec n entier strictement positif quelconque, pour la recherche de son minimum ?

3) Les créateurs d'un jeu vidéo en ligne cherchent à classer rapidement les joueurs, en fonction de leur nombre d'erreurs ; ces joueurs sont classés dans l'ordre croissant de leur nombre d'erreurs.

Les nombres d'erreurs par joueur constituent une liste d'entiers qu'il faut donc ordonner (on admet que le nom du joueur reste associé à son nombre d'erreurs).

On suppose que l'on dispose de l'instruction « supprimer un élément de la liste », qui supprime la première occurrence de l'élément donné, dans la liste donnée et de l'instruction « ajouter un élément à la liste », qui vient ajouter l'élément donné à la fin de la liste (à droite).

Les créateurs élaborent l'algorithme suivant, où L_1 est une liste donnée de nombres :

```
Saisir L1
L2 ← Liste vide
Tant que L1 n'est pas vide Faire
     m ← min(L1)
     Ajouter m à L2
     Supprimer m de L1 .
Fin Tant que
```

a) Faire tourner cet algorithme avec la 4-liste $L_1 = (3;6;6;-10)$, puis une deuxième fois avec la 8-liste $L_1' = (5;9;-10;2;3;-15;120;1)$.

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

4) **a)** Justifier que l'exécution de l'algorithme nécessite 6 comparaisons pour la liste L_1.
b) Déterminer le nombre de comparaisons opérées par l'algorithme pour la liste L_1'.

5) On considère une n-liste pour n entier strictement positif. On note $T(n)$ le nombre de comparaisons utilisées pour trier une n-liste .
Justifier que $T(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$.

6) Quelques propriétés…
a) Montrer que pour tout n entier strictement positif, $T(n) + T(n+1) = n^2$.

b) On remarque que $3 = T(3) + T(1) + T(1)$ ou encore que $3 = T(2) + T(2) + T(2)$.
Vérifier que 19 s'écrit aussi $T(a) + T(b) + T(c)$, où a, b et c sont des entiers strictement positifs.
On donnera toutes les possibilités.

7) A l'issue des tris consécutifs de trois listes par l'algorithme précédent, on constate qu'on a effectué 2161 comparaisons au total.
a) On admet que l'une des listes comporte deux éléments.
Quelle était la taille de chaque liste donnée ? Expliciter la démarche.

b) Déterminer une autre combinaison possible, dans le cas où on n'aurait aucune information complémentaire.
Expliciter la démarche.

8) *On considère que le temps d'exécution d'une comparaison est de* $0{,}000004$ *ms en moyenne (autrement dit* 4.10^{-6} *ms) et que le temps d'exécution d'une affectation (c'est-à-dire le fait de donner une valeur à une variable) est si faible qu'on le traite comme nul. On ne prend donc en compte que les comparaisons pour estimer le temps d'exécution d'un algorithme.*
Combien de temps nécessiterait en moyenne le classement de 1000 joueurs, en ms ? de $1\,000\,000$ de joueurs, en minutes ? Est-ce satisfaisant, selon vous ?

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Le défi de Léonard

Un nombre premier est un nombre entier positif possédant exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; ... sont des nombres premiers.

Tout jeune, Léonard s'intéresse déjà aux nombres premiers.
Depuis quelques jours, il se pose des questions sur ceux pouvant s'écrire sous la forme $x^2 - 5x + c$, où x et c sont des nombres entiers positifs. Il vient à votre rencontre afin de partager avec vous le fruit de ses réflexions.

Partie A

« *Bonjour ! En complétant le tableau ci-dessous, j'ai trouvé quatre nombres premiers* p *du type* $p = x^2 - 5x + 1$ *qui peut aussi s'écrire* $p = x(x-5) + 1$, *avec* x *entier dans l'intervalle* $[9; 16]$. »

Recopier et compléter le tableau afin de confirmer les résultats de Léonard.

x	9	10	11	12	13	14	15	16
$x-5$								
$x(x-5)$								
$x(x-5)+1$								

Partie B

1) « *Je me demande aussi s'il existe des nombres premiers* p *de la forme* $p = x^2 - 5x + 2$, *avec* x *entier dans l'intervalle* $[9; 16]$. »
Quelle sera la conclusion de Léonard ?

2) Plus généralement, existe-t-il des nombres premiers *p* de la forme $p = x^2 - 5x + c$, lorsque x est un entier positif quelconque et c un nombre pair ?

Partie C

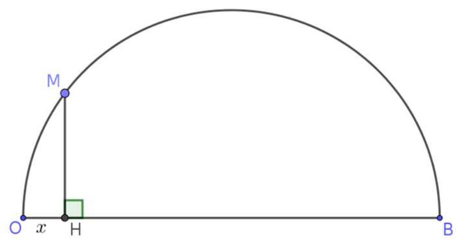
Considérant maintenant le cas où c *e*st impair et vaut $c = 11$ avec x entier positif quelconque.
Léonard poursuit :

1) « *J'ai réussi à prouver que si p est un nombre premier de la forme* $p = x^2 - 5x + 15$ *alors* x *ne peut être ni de la forme* $3k$ *, ni de la forme* $3k + 2$ *avec* k *entier.* »
Montrer que si x s'écrit de la forme $x = 3k$ ou $= 3k + 2$, avec k entier, alors $x^2 - 5x + 15$ n'est pas un nombre premier.

2) « *Si* $p = x^2 - 5x + 15$ *est un nombre premier, il ne reste donc qu'une seule façon d'écrire* x. »
Quelle est cette forme ?

Partie D

Considérons désormais le cas où $c = 11$ avec x positif quelconque.
Léonard se réjouit :
« *Oh, quelle figure intéressante ! J'ai tracé un demi-cercle de diamètre [OB] de longueur 5, sur lequel j'ai placé un point M et j'ai nommé H le point de [OB] tel que (OH) et (HM) soient perpendiculaires.* »
« *Le théorème de Pythagore m'a permis d'établir la relation :*
$2MH^2 = OB^2 - OH^2 - HB^2$.
J'en ai déduit que : $MH^2 = OH \times HB$ ».



1) Retrouver les deux égalités établies par Léonard.

2) « *En notant* x *la distance OH, j'ai trouvé quelle valeur numérique donner à MH pour que la relation* $MH^2 = OH \times HB$ *soit équivalente à l'équation* $x^2 - 5x + 11 = 7$.
a) Exprimer $OH \times HB$ en fonction de x.
b) Retrouver la valeur de MH dont parle Léonard.

3) *« Je viens de découvrir comment construire, sans calcul, les solutions de l'équation* $x^2 - 5x + 11 = 7$.*»*
Expliquer comment Léonard a fait.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

De l'arithmétique lunatique

Entrons dans un monde étrange où les additions et les multiplications sont différentes de celles que nous avons apprises à l'école primaire ...

Dans ce sujet, les nombres considérés seront des nombres entiers positifs ou nuls.

Partie A : Définitions et premiers exemples

Définitions	L'**addition lunatique** $\oplus$ consiste à poser l'addition comme en classe de primaire. Puis pour l'effectuer, on prend dans chaque colonne, le chiffre le plus grand.	La **multiplication lunatique** $\otimes$ se pose aussi, au départ, comme en primaire. Puis, lors du calcul, les multiplications intermédiaires consistent à prendre le plus petit des deux chiffres, puis pour les additions, à utiliser l'addition lunatique.
Exemples avec des nombres à un chiffre	$3 \oplus 5 = 5$ $\quad 4 \oplus 4 = 4$ $3 \oplus 4 \oplus 5 = 5$	$2 \otimes 8 = 2$ $\quad 7 \otimes 7 = 7$
Exemples avec des nombres à plusieurs chiffres	$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ \oplus & & 6 & 7 & 2 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 5 & 9 \end{array}$ Donc $12\,753 \oplus 6\,729 = 16\,759$.	$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & 4 & 1 & 7 \\ & & \otimes & & 5 & 8 & 3 \\ \hline & & & 2 & 3 & 1 & 3 \\ \oplus & & 2 & 4 & 1 & 7 & . \\ \oplus & 2 & 4 & 1 & 5 & . & . \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$ Donc $2\,417 \otimes 583 = 244\,573$

1) Calculer $1914 \oplus 2018$.
2) Calculer $1789 \otimes 732$ puis $732 \otimes 1789$. Que remarque-t-on ?
3) Calculer $43 \otimes (25 \oplus 71)$ et $(43 \otimes 25) \oplus (43 \otimes 71)$. Que remarque-t-on ?
4) Trouver un nombre entier α tel que pour tout entier n, $\alpha \oplus \ n = n$.
5) Trouver un nombre entier β tel que pour tout entier n, $\beta \otimes n = n$.
6) On a vu que $2417 \otimes 583 = 244\,573$. Trouver deux autres entiers m et n tels que $m \otimes n = 244\,573$ en utilisant, dans l'écriture de m et n, seulement les chiffres du résultat $244\,573$, c'est-à-dire $2, 3, 4, 5$ et 7.

Partie B : Des surprises lunatiques

1) **Nombres pairs lunatiques**
   Soit n un entier.
   a) Calculer $n \oplus n$.
   b) A-t-on $n \oplus n = 2 \otimes n$?
2) **Carrés lunatiques**
   Calculer $n \otimes n$ pour n entier allant de 0 à 20.
   Donner la liste des carrés lunatiques de n pour n allant de 0 à 20.
3) **Equations lunatiques**
   Déterminer, s'ils existent, tous les entiers n tels que :
   a) $75 \oplus n = 76$.
   b) $12 \otimes n = 26$.
   c) $16 \otimes n = 165$.

Partie C : Nombres premiers lunatiques

Un nombre entier positif est un nombre premier lunatique s'il est différent de 9 et s'il est seulement le produit lunatique de 9 avec lui-même.

1) Prouver que 19 est le plus petit nombre premier lunatique.
2) Quel est le suivant ?