Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Cinq pour mille

On définit la $factorielle$ d'un nombre entier naturel non nul n comme le produit des nombres entiers compris entre 1 et n. Par exemple, $factorielle(10) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$. On pourra également noter ce produit $1 \times 2 \times \ldots \times 10$.
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel non nul multiple de 1 et de lui-même uniquement.
Par exemple : $2, 3$ et 5 sont des nombres premiers.

Partie A

1. Calculer $factorielle(7)$.
2. Justifier que $factorielle(7)$ est un multiple de tous les entiers naturels compris entre 2 et 7.
3. **a.** Démontrer que $factorielle(7) + 5$ est un multiple de 5.
   b. En déduire que $factorielle(7) + 5$ n'est pas un nombre premier.

Partie B

Le but de cette partie est de démontrer la propriété suivante : « il existe 1000 entiers naturels consécutifs tels qu'exactement 5 d'entre eux sont premiers ».
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $F(n)$ le nombre de nombres premiers compris entre n et $n + 999$.

1. Montrer que $F(2) > 5$.
2. On pose $A = factorielle(1001) + 2$.
   - **a.** Montrer que A n'est pas premier.
   - **b.** Montrer que $A + 1$ n'est pas premier.
   - **c.** Démontrer que pour tout entier naturel k compris entre 0 et 999, le nombre $A + k$ n'est pas premier.
   - **d.** En déduire $F(A)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'écart entre $F(n)$ et $F(n + 1)$ est égal à 0 ou à 1.
4. En déduire qu'il existe 1000 entiers naturels consécutifs tels qu'exactement 5 d'entre eux sont premiers.