Cinq pour mille

Partie A

On définit la factorielle d'un entier naturel n non nul comme le produit des nombres compris entre 1 et n. Par exemple, $\text{FACTORIELLE}(10) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$. On la notera également $1 \times 2 \times \cdots \times 10$.

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel non nul seulement multiple de 1 et de lui-même.

1. Calculer $\text{FACTORIELLE}(7)$.

Réponse

$\text{FACTORIELLE}(7) = 7 \times 6 \times \cdots \times 1 = 5040$

2. Justifier que $\text{FACTORIELLE}(7)$ est un multiple de tous les entiers naturels compris entre 2 et 7.

Réponse

$\text{FACTORIELLE}(7)$ est le produit des entiers de 1 à 7, donc chacun de ces entiers multiplié avec le produit des autres donne $\text{FACTORIELLE}(7)$. Donc $\text{FACTORIELLE}(7)$ est un multiple de tous les entiers naturels compris entre 2 et 7.

3. a. Démontrer que $\text{FACTORIELLE}(7) + 5$ est un multiple de 5.

Réponse

$\text{FACTORIELLE}(7) + 5 = 5045 = 5 \times 1009$

b. En déduire que $\text{FACTORIELLE}(7) + 5$ n'est pas un nombre premier.

Réponse

D'après la question précédente, 5 divise $\text{FACTORIELLE}(7) + 5$ sans lui être égal, ni à 1. Donc $\text{FACTORIELLE}(7) + 5$ n'est pas premier.

Partie B

Le but de cette partie est de démontrer la propriété suivante : «il existe 1000 entiers naturels consécutifs tels qu'exactement 5 d'entre eux sont premiers».

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note $f(n)$ le nombre de nombres premiers compris entre n et $n + 999$.

1. Montrer que $f(2) \geqslant 5$.

Réponse

Entre 1 et 1000, on trouve plus que 5 nombres premiers, par exemple 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...

2. On pose $A = \text{FACTORIELLE}(1001) + 2$.

a. Montrer que A n'est pas premier.

Réponse

$A > 2$ est pair car somme de deux nombres pairs, donc non premier.

b. Montrer que $A + 1$ n'est pas premier.

Réponse

$a + 1 = 1 \times 2 \times \mathbf{3} \times \cdots \times 1001 + \mathbf{3}$ est divisible par 3 (on peut mettre 3 en facteur).

c. Démontrer que pour tout entier naturel k compris entre 0 et 999, le nombre $A + k$ n'est pas premier.

Réponse

Pour tout entier naturel k compris entre 0 et 999, $k + 2$ est compris entre 2 et 1001, $a + k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (k+2) \times \cdots \times 1001 + k + 2$ est divisible par $k + 2$ (on peut mettre $k + 2$ en facteur). Le nombre $A + k$ n'est pas premier.

d. En déduire $f(A)$.

Réponse

D'après les questions précédentes, $f(A) = 0$

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'écart entre $f(n)$ et $f(n+1)$ est de 0 ou de 1.

Réponse

Dans la liste des entiers consécutifs entre $n+1$ et $n+1+999 = n+1000$, on a enlevé n et ajouté $n+1000$ à la liste précédente, donc on a au maximum ajouté un nombre premier et au maximum supprimé un nombre premier. Donc l'écart entre $f(n)$ et $f(n+1)$ est de 0 ou de 1.

4. En déduire qu'il existe 1000 entiers consécutifs tels que exactement 5 d'entre eux sont premiers.

Réponse

Entre 1 et 1000, on trouve strictement plus que 5 nombres premiers, donc $f(1) > 5$, et entre A et $A+999$, on n'en trouve pas donc $f(A) = 0$. Or l'écart entre $f(n)$ et $f(n+1)$ est au plus 1. Donc il existe un entier entre 1 et A où parmi les 999 entiers suivants, 5 sont exactement premiers.

Avec Mathematica on trouve par exemple exactement 5 nombres premiers entre 99 999 999 999 999 999 999 990 057 020 et 99 999 999 999 999 999 999 990 058 019, ces nombres sont :

- 99 999 999 999 999 999 999 990 057 091
- 99 999 999 999 999 999 999 990 057 281
- 99 999 999 999 999 999 999 990 057 491
- 99 999 999 999 999 999 999 990 057 697
- 99 999 999 999 999 999 999 990 057 967