La danse des nombres

Dans ce problème, on considère des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 999, que l'on écrira toujours avec trois chiffres en rajoutant des zéros devant si nécessaire. Par exemple 957 s'écrit 957, mais 17 s'écrit 017 et 3 s'écrit 003.

Pour les nombres ainsi écrits, on définit une fonction *Tourner*, qui prend le dernier chiffre du nombre à trois chiffres et le met en première position. Par exemple, *Tourner* 517 donne 751, *Tourner* 003 donne 300.

I. Quelques exemples

1) *Tourner* 312 donne 231, *Tourner* 017 donne 701

2) *Tourner* deux fois 312 donne 123, *Tourner* deux fois 556 donne 565.

3) *Tourner* « a b c » donne « c a b », *Tourner* deux fois « a b c » donne « b c a ».

4) Faire *Tourner* « a b c » une troisième fois donne "a b c", c'est-à-dire le nombre de départ.

II. Regroupement par familles

Pour un nombre à trois chiffres, on regarde tous les nombres que l'on peut obtenir en le faisant *Tourner*, et on les appelle la famille de ce nombre. Par exemple, la famille de 317 est {317 ;731 ;173}. On ne tient pas compte de l'ordre des éléments d'une famille.

1) La famille de 312 est {312 ;231 ;123}. Celle de 007 est {007 ;700 ;070}.

2) La famille de 312 est {312 ;231 ;123}, celle de 231 est {231 ;123 ;312}. Comme l'ordre dans une famille ne compte pas, elles sont identiques.

3) La famille de 111 ne contient qu'un seul élément car *Tourner* 111 donne encore 111.

4) Si une famille ne contient qu'un seul élément, disons « a b c », alors il doit être égal à lui-même ayant Tourner, c'est-à-dire « a b c » = « c a b ». Donc $c=a; a=b; b=c$ soit $a=b=c$ donc ce sont les nombres qui ont trois fois le même chiffre. Il y en a 10, de 000 à 999

5) Si une famille ne contient que deux éléments, elle en contient un, disons « a b c », ce même élément après l'avoir fait *Tourner*, c'est à dire « c a b », et aucun autre.
En particulier *Tourner* « c a b », c'est à dire « b c a », est égal à un des deux nombres précédents.
Soit il est égal à « a b c » et dans ce cas $a = b; b = c; c = a$ donc $a = b = c$ donc le nombre contient trois fois le même chiffre, et d'après la question précédente il est seul dans sa famille, ce qui contredit le fait qu'il y ait deux éléments dans la famille.
Sinon, le nombre « b c a » est égal à « c a b » et on peut faire le même raisonnement, on aboutit encore à une absurdité.
Il n'y a donc aucune famille qui contient exactement deux éléments.

6) Il y a au total 1000 nombres inférieurs à 999, en comptant 000. 10 d'entre eux sont seuls dans leur famille, donc les 990 restants sont dans des familles par groupe de 3 éléments distincts.
Il y a donc 990/3 = 330 familles différentes.

III. Inverser l'ordre d'un nombre

On se donne une nouvelle fonction, *Inverser*, qui inverse le sens de lecture d'un nombre à trois chiffres. Par exemple, *Inverser* 712 donne 217.

1) *Inverser* 752 donne 257; *Inverser* 312 donne 213 ; *Inverser* 313 donne 313.

2) *Inverser* un nombre « a b c » donne « c b a » et l'*Inverser* de nouveau donne « a b c », c'est-à-dire le nombre de départ.

3) *Inverser* un nombre « a b c » donne « c b a » et *Tourner* « a b c » donne « c a b ». Ces deux résultats sont égaux lorsque a=b. Ainsi les nombres recherchés sont de la forme « a a c ».

4) Oui, 133 par exemple, qui donne 331 dans les deux cas.

5) Ce sont les nombres de la forme « a b a », il y en a donc 100 (10 possibilités pour a, 10 pour b).