Kapre c'est fini - Corrigé

1ère Partie :

On considère l'algorithme suivant :

- Choisir un entier *n* dans E ayant au moins deux chiffres distincts.
- Calculer l'entier $d = n_1 - n_2$ correspondant.
- Itérer le processus avec le nombre *d*.

1. Test de l'algorithme pour $n = 5631$:

Etape	n_1	n_2	$d = n_1 - n_2$
1	6531	1356	5175
2	7551	1557	5994
3	9954	4599	5355
4	5553	3555	1998
5	9981	1899	8082
6	8820	288	8532
7	8532	2358	6174
8	7641	1467	6174

2. On remarque que l'algorithme boucle après la septième étape.

2ème Partie : Approche d'une explication.

Dans notre système décimal, tout entier non nul peut être décomposé suivant des puissances de dix.
Par exemple : $3451 = 3\times1000 + 4\times100 + 5\times10 + 1$.

Par la suite, nous noterons $\overline{x; y; z; t}$ un entier de E égal à $1000x + 100y + 10z + t$, où x, y, z et t sont des entiers entre 0 et 9.
Par exemple : $3451 = \overline{3; 4; 5; 1}$.

Soit $n \epsilon E$. On écrit $n_1 = \overline{x; y; z; t}$.

1. a. $n_1 = 1000x + 100y + 10z + t$ et $n_2 = 1000t + 100z + 10y + x$

   b. On se place dans le cas où $y = z$.
   $n_1 - n_2 = 1000(x - t) + 100(y - z) + 10(z - y) + t - x = 1000(x - t) - (x - t)$
   Donc on a bien $n_1 - n_2 = 999(x - t)$.

   c. On se place maintenant dans le cas où $y \neq z$. Puisque n_1 est le nombre obtenu en rangeant les quatre chiffres de n dans l'ordre décroissant, on a : $0 \leq t \leq z < y \leq x \leq 9$.
   En particulier :
   - $0 \leq x - t \leq 9 - t \leq 9$ donc $0 < x - t \leq 9$.
   - $0 < y - z \leq 9 - z \leq 9$ donc $0 \leq y - z - 1 \leq 9$ car $y - z$ est un entier.
   - $-9 \leq z - y \leq 0$ donc $0 \leq 9 + z - y \leq 9$.
   - $-9 \leq t - x < 0$ donc $0 \leq 10 + t - x < 10$ ce qui donne $0 \leq 10 + t - x \leq 9$ car $10 + t - x$ est un entier.

   Maintenant, retravaillons l'écriture de $n_1 - n_2$:

$$n_1 - n_2 = 1000(x - t) + 100(y - z) + 10(z - y) + t - x - 100 + 90 + 10$$
$$= 1000(x - t) + 100(y - z - 1) + 10(9 + z - y) + (10 + t - x)$$

Donc on a bien : $n_1 - n_2 = \overline{x - t; y - z - 1; 9 + z - y; 10 + t - x}$, et cette écriture est bien justifiée puisque les nombres $x - t$, $y - z - 1$, $9 + z - y$ et $10 + t - x$ sont des entiers compris entre 0 et 9.

2. a. Lorsque $x - t = 4$, on a cinq possibilités pour la différence $n_1 - n_2$:
   - Si $y = z$, alors $n_1 - n_2 = 999 \times 4 = 3996$ d'après la question 2b.
   - Si $y \neq z$, alors $n_1 - n_2 = \overline{4; y - z - 1; 9 + z - y; 10 - 4}$ d'après la question 2c.
     Or $t \leq z < y \leq x$ donc $0 \leq y - z - 1 < y - z \leq x - t$, ce qui signifie que le nombre $y - z - 1$ ne peut valoir que 0, 1, 2 ou 3 lorsque $x - t = 4$. On en déduit les quatre autres valeurs possibles pour la différence $n_1 - n_2$:
     - Lorsque $y - z - 1$=0, on a : $n_1 - n_2 = \overline{4; 0; 8; 6}$ soit $n_1 - n_2 = 4086$
     - Lorsque $y - z - 1$=1, on a : $n_1 - n_2 = \overline{4; 1; 7; 6}$ soit $n_1 - n_2 = 4176$
     - Lorsque $y - z - 1$=2, on a : $n_1 - n_2 = \overline{4; 2; 6; 6}$ soit $n_1 - n_2 = 4266$
     - Lorsque $y - z - 1$=3, on a : $n_1 - n_2 = \overline{4; 3; 5; 6}$ soit $n_1 - n_2 = 4356$

   On notera F l'ensemble {3996 ;4086 ;4176 ;4266 ;4356}.

   b. Pour $n = 3996$, on a $n_1 = 9963$ et $n_2 = 3699$ donc à l'étape 1, on a :
   $d = 9963 - 3699 = 6264$.
   On réitère le procédé et on obtient à l'étape 2 : $d = 6642 - 2466 = 4176$
   Puis à l'étape 3 : $d = 7641 - 1467 = 6174$ et donc dans ce cas, le nombre minimal d'étapes nécessaires pour obtenir 6174 est 3.

   De la même manière pour $n = 4086$, le nombre minimal d'étapes nécessaires pour obtenir 6174 est 6 ; pour $n = 4176$, le nombre minimal d'étapes nécessaires pour obtenir 6174 est 1 ; pour $n = 4266$, le nombre minimal d'étapes nécessaires pour obtenir 6174 est 2 et pour $n = 4356$, le nombre minimal d'étapes nécessaires pour obtenir 6174 est 3 .