

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Palindrom'Party

Un palindrome est un nombre entier naturel non nul qui reste inchangé lorsqu'on le lit de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, les nombres 16861 et 20102 sont des palindromes à 5 chiffres.

On notera $P(n)$ le nombre de palindromes à n chiffres, avec n un entier non nul et $T(n)$ le nombre de palindromes comportant au plus n chiffres. Par conséquent, $T(n) = P(1) + P(2) + \dots + P(n)$.

Il est rappelé que n est un entier pair si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n = 2k$ et que n est un entier impair si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Partie A

1. Déterminer $P(1)$ et $P(2)$. Justifier.
2. Lister les palindromes à 3 chiffres commençant par 5 puis ceux à 4 chiffres commençant par 5. Déterminer $P(3)$ et $P(4)$. En déduire $T(4)$.
3. Montrer que, si n est impair, $P(n + 1) = P(n)$ et que, si n est pair, $P(n + 1) = 10 P(n)$.
4. Montrer que, si n est impair, $P(n) = 9 \times 10^{\frac{n-1}{2}}$.
5. En déduire $T(8)$.

Partie B

Une société songe à lancer un nouveau jeu de loterie : le joueur mise 1€ et se voit attribuer au hasard un nombre entier compris entre 1 et 100 000 000 par un tirage aléatoire informatique. Si ce nombre est un palindrome, le joueur gagne la partie. Sinon, il perd la partie.

1. Prouver que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à 0,000 199 98.
2. Dans cette question, on suppose que la société reverse 500 000€ à chaque gagnant du jeu.
 - a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Gain algébrique (en euros)	-1	499 999
Probabilité pour un joueur d'obtenir ce gain		

- b. Calculer la moyenne des gains algébriques que peut espérer gagner un joueur en jouant à ce jeu.
3. Dans cette question, on suppose maintenant que la société reverse $(9 - k)$ centaines de milliers d'euros aux gagnants du jeu, k étant le nombre de chiffres de son palindrome. À quel montant minimal l'entreprise doit-elle fixer la mise d'un joueur pour, qu'en moyenne, celui-ci perde de l'argent en jouant ?