Palindrom' party

Palindrom' party - Éléments de correction

Partie A

1) P*(1)* = P*(2) = 9* car les palindromes à 1 chiffre sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et les palindromes à 2 chiffres sont 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

2) Il y a 10 nombres palindromes à 3 chiffres commençant par 5 sont 505 ; 515 ; 525 ; 535 ; 545 ; 555 ; 565 ; 575 ; 585 ; 595. De même, il y a 10 palindromes commençant par 1, 10 palindromes commençant par 2, … 10 palindromes commençant par 9. Finalement, P*(3) = 90*.

Les nombres palindromes à 4 chiffres commençant par 5 sont 5005 ; 5115 ; 5225 ; 5335 ; 5445 ; 5555 ; 5665 ; 5775 ; 5885 ; 5995. Avec le même raisonnement que précédemment, on en déduit que P*(4) = 90*.

3) **<u>Si *n* est impair</u>**, il existe un entier *k* tel que *n = 2k + 1*.
Un palindrome à *n* chiffres est caractérisé par ses *k* premiers chiffres (le premier étant non nul) et son chiffre de rang *k+1.*
Un palindrome à *n+1* chiffres est caractérisé par ses *k+1* premiers chiffres (le premier étant non nul).
Ainsi, il y a autant de palindromes à *n* chiffres que de palindromes à *n+1* chiffres si *n* est impair : P*(n+1)* = P*(n)*.

<u>Si *n* est pair</u>, il existe un entier *k* tel que *n = 2k*.
Un palindrome à *n* chiffres est caractérisé par ses *k* premiers chiffres (le premier étant non nul).
Un palindrome à *n+1* chiffres est caractérisé par ses *k* premiers chiffres (le premier étant non nul) et par le chiffre de rang *k+1* (10 possibilités parmi 0, 1, 2, …, 9).
Ainsi, il y a 10 fois plus de palindromes à *n+1* chiffres que de palindromes à *n* chiffres si *n* est pair : P*(n+1) = 10* P*(n)*.
<u>OU BIEN :</u>
<u>Si n est impair</u> ($n+1$ pair), les $\frac{n-1}{2}$ premiers chiffres d'un palindrome à n chiffres déterminent les $\frac{n-1}{2}$ derniers (qui sont les mêmes écrits dans l'autre sens) ; le palindrome présente alors un chiffre central, pour lequel il y a 10 possibilités.
Les $\frac{n-1}{2}$ premiers chiffres d'un palindrome à $n+1$ chiffres déterminent aussi les $\frac{n-1}{2}$ derniers, mais le palindrome présente alors DEUX chiffres centraux, forcément identiques, et pour lesquels il y a donc 10 possibilités seulement…Les palindromes à $n+1$ chiffres sont donc les palindromes à n chiffres au sein desquels on a écrit le chiffre central en double exemplaire.
Par conséquent, on retrouve bien que $\mathcal{P}(n+1) = \mathcal{P}(n)$ lorsque n est impair.
<u>Si n est pair</u> ($n+1$ impair) : les $\frac{n}{2}$ premiers chiffres d'un palindrome à n chiffres déterminent les $\frac{n}{2}$ derniers .
Les $\frac{n}{2}$ premiers chiffres d'un palindrome à $n+1$ chiffres déterminent aussi les $\frac{n}{2}$ derniers, mais le palindrome présente alors un chiffre central pour lequel il y a donc 10 possibilités, Les palindromes à $n+1$ chiffres sont donc les palindromes à n chiffres au centre desquels on a intercalé un chiffre ; autrement dit, ils sont 10 fois plus nombreux : $\mathcal{P}(n+1) = 10 \times \mathcal{P}(n)$ lorsque n est pair.

4) Si *n* est impair, il existe un entier *k* tel que *n = 2k + 1*. Un palindrome à *n* chiffres est caractérisé par ses *k* premiers chiffres (le premier étant non nul) et son chiffre de rang *k+1*. Il y a 9 possibilités pour le premier chiffre et 10 possibilités pour les *k* suivants, soit 9×10^k possibilités. Comme $k = \dfrac{n-1}{2}$, on en déduit P*(n)* = $9 \times 10^{\frac{n-1}{2}}$.

<u>OU BIEN</u>

Si n est impair, alors $n-1$ est pair, donc $\mathcal{P}(n) = 10\mathcal{P}(n-1) = 10\mathcal{P}(n-2)$ (car $n-2$ est alors impair) $= 10\times10\mathcal{P}(n-3) = 10^2\mathcal{P}(n-4)$=…

En continuant la réécriture selon cette démarche, il vient bien $\mathcal{P}(n) = 10^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{P}(1)$ car, la puissance de 10 n'augmente qu'une fois sur deux, lors des $n-1$ étapes de réécriture. De plus, comme $\mathcal{P}(1) = 9$, on retrouve bien $\mathcal{P}(n) = 9\times10^{\frac{n-1}{2}}$.

Complément : au niveau terminale S, cette démonstration peut se faire plus rigoureusement par récurrence…

5) T*(8)* = P*(1)* + P*(2)* + P*(3)* + P*(4)* + P*(5)* + P*(6)* + P*(7)* + P*(8)*

T*(8) = 2* P*(1) + 2* P*(3) + 2* P*(5) + 2* P*(7)* (car si *n* est impair, P*(n+1)* = P*(n)*)

T*(8)* = $2 \times 9 + 2 \times 90 + 2 \times 9 \times 10^{\frac{5-1}{2}} + 2 \times 9 \times 10^{\frac{7-1}{2}}$

T*(8) = 18 + 180 + 1 800 + 18 000*

T*(8) = 19 998*

Partie B

1) La probabilité de gagner est égale à T*(8) / 100 000 000 = 0,000 199 98*.
2) a.

Gain algébrique (en euros)	-1	499 999
Probabilité pour un joueur d'obtenir ce gain.	0,99980002	0,00019998

b. La moyenne des gains algébriques que peut espérer gagner un joueur en jouant à ce jeu est égale à $-1 \times 0{,}9998002 + 499999 \times 0{,}00019998 = 98{,}99$€.

3) Soit *x* la mise du joueur.

k	Pas de palindrome	1	2	3	4	5	6	7	8
Gain algébrique (en euros)	-x	800000-x	700000-x	600000-x	500000-x	400000-x	300000-x	200000-x	100000-x
Probabilité pour un joueur d'obtenir ce gain.	0,99980002	0,00000009	0,00000009	0,0000009	0,0000009	0,000009	0,000009	0,00009	0,00009

La moyenne G des gains algébriques que peut espérer gagner un joueur en jouant à ce jeu est égale à :

$$G = -x \times 0{,}99980002 + (800000 - x) \times 0{,}00000009 + \ldots + (100000 - x) \times 0{,}00009$$
$$G = 34{,}425 - x$$

Ainsi, le joueur perd de l'argent en moyenne si, et seulement si :

$$G < 0$$
$$\Leftrightarrow 34{,}425 - x < 0$$
$$\Leftrightarrow 34{,}425 < x$$

Par conséquent, pour une mise supérieure ou égale à 34,43€, le jeu sera défavorable au joueur.