

## Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

### *Danse des nombres*

Dans ce problème, on considère des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 999, que l'on écrira toujours avec trois chiffres en rajoutant des zéros devant si nécessaire. Par exemple 957 s'écrit 957, mais 17 s'écrit 017 et 3 s'écrit 003.

Pour les nombres ainsi écrits, on définit une fonction *Tourner*, qui prend le dernier chiffre du nombre à trois chiffres et le met en première position. Par exemple, *Tourner* 517 donne 751, *Tourner* 003 donne 300.

#### **Partie A : Quelques exemples**

1. Faire *Tourner* les nombres suivants : 312 ; 017.
2. Faire *Tourner* deux fois 312, puis *Tourner* deux fois 556.
3. Plus généralement, on écrit un nombre à trois chiffres " $a b c$ ", où  $a, b$  et  $c$  sont ses trois chiffres. Faire *Tourner* " $a b c$ ", puis *Tourner* deux fois " $a b c$ ".
4. Montrer que si on fait *Tourner* trois fois un nombre à trois chiffres, il redevient lui-même.

#### **Partie B : Regroupement par familles**

Pour un nombre à trois chiffres, on regarde tous les nombres que l'on peut obtenir en le faisant *Tourner*, et on les appelle la famille de ce nombre. Par exemple, la famille de 317 est {317 ; 731 ; 173}. On ne tient pas compte de l'ordre des éléments d'une famille.

1. Quelle est la famille de 312 ? De 007 ?
2. Montrer que les familles de 312 et 231 sont identiques.
3. Trouver une famille qui ne contient qu'un seul élément.
4. Trouver toutes les familles qui ne contiennent qu'un seul élément. Expliquer votre démarche.
5. Montrer qu'aucune famille ne peut contenir exactement deux éléments.
6. En déduire le nombre de familles différentes contenant exactement trois éléments.

#### **Partie C : Inverser l'ordre d'un nombre**

On se donne une nouvelle fonction, *Inverser*, qui inverse le sens de lecture d'un nombre à trois chiffres. Par exemple, *Inverser* 712 donne 217.

1. *Inverser* les nombres suivants : 752 ; 312 ; 313.
2. Montrer que si on applique *Inverser* deux fois à un nombre, il redevient lui-même.
3. Quels sont les nombres tels que *Inverser* donne le même résultat que *Tourner* ?
4. Existe-t-il des nombres qui n'ont pas trois fois le même chiffre et tels que *Inverser* donne le même résultat que *Tourner* deux fois ? Justifier.
5. Combien y a-t-il de nombres qui restent inchangés si on leur applique *Inverser* ?