Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Kapre, c'est fini

On considère l'ensemble E des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9999.

À tout élément n de E on associe deux entiers :

* n_1 le nombre obtenu en rangeant les quatre chiffres de n dans l'ordre décroissant.
* n_2 le nombre obtenu en rangeant les quatre chiffres de n dans l'ordre croissant.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

- Choisir un entier n dans E ayant au moins deux chiffres distincts. - Calculer l'entier $d = n_1 - n_2$ correspondant. - Itérer le processus avec le nombre d.

1. Recopier et compléter le tableau suivant afin de tester cet algorithme pour $n = 5631$:

Etape	n_1	n_2	$d = n_1 - n_2$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

2. Quelle sera la valeur de d à l'étape 2019 ?

Partie B : Approche d'une explication

Dans notre système décimal, tout entier non nul peut être décomposé suivant des puissances de dix.

Par exemple : $3451 = 3\times1000 + 4\times100 + 5\times10 + 1$.

Par la suite, nous noterons $\overline{x; y; z; t}$ un entier de E égal à $1000x + 100y + 10z + t$, où x, y, z et t sont des entiers compris entre 0 et 9.

Par exemple : $3451 = \overline{3; 4; 5; 1}$.

Soit $n \in E$. On écrit $n_1 = \overline{x; y; z; t}$.

1. **a.** Ecrire n_1 et n_2 en décomposition en puissances de 10.

b. On se place dans le cas où $y = z$. Montrer alors que : $n_1 - n_2 = 999(x - t)$.

c. On se place maintenant dans le cas où $y \neq z$. Justifier les inégalités suivantes :

- $0 \leq x - t \leq 9$
- $0 \leq y - z - 1 \leq 9$
- $0 \leq 9 + z - y \leq 9$
- $0 \leq 10 + t - x \leq 9$

Montrer alors que $n_1 - n_2 = \overline{x - t; y - z - 1; 9 + z - y; 10 + t - x}$.

2. **a.** Quelles sont les cinq valeurs prises par la différence $d = n_1 - n_2$ lorsque $x - t = 4$?

On notera F cet ensemble.

b. Déterminer, pour chaque entier n de F, le nombre minimal d'étapes nécessaires pour que la différence $d = n_1 - n_2$ soit égale à 6174.