Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. ***a.*** Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

(4, 4, 5) ; (3, 6, 9) ; (2, 2, 6)

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$.
a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?
b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. ***a.*** Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.
a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?
b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?
c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038(x + y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.
a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.
b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}.$$

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et j le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »
En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.
De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.