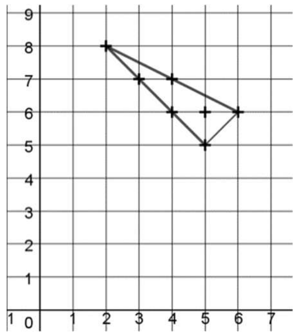
Triangles à côtés entiers (Toutes séries)

Éléments de solution

1. *a.* (4, 4, 5) est le seul qui réponde à la définition.
On trace un segment [BC] de longueur 5. Le cercle de centre B de rayon 4 coupe la médiatrice de [BC] en deux points. A est l'un d'eux.
b. En appliquant la définition $19 \leq z \leq 33$.
c. C'est l'inégalité stricte qui manque : $z < x + y$. Une fois z déclaré le plus grand, le fait que la longueur de chaque côté soit inférieure à la différence des longueurs des deux autres est acquis.

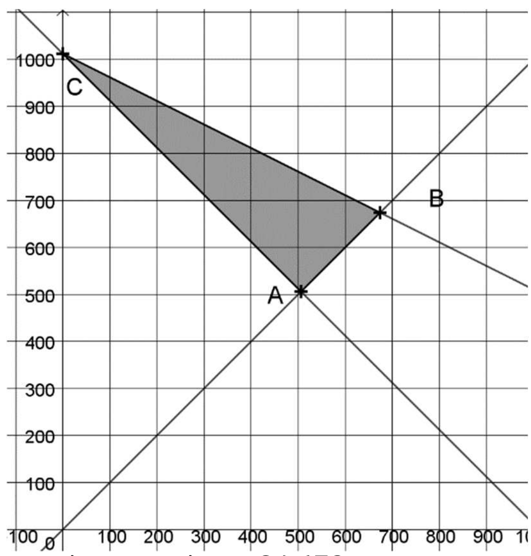


2. *a.* Comme $z < x + y$, $x + y + z > 2z$. Il s'ensuit que $z \leq 8$. La plus petite valeur de z est celle pour laquelle les trois côtés sont de même longueur, 6.
b. Pour énumérer les éléments de E_{18} , on tient compte du fait que les deux plus petits côtés ont des longueurs x et y telles que $x + y > 9$. On obtient :
$E_{18} = \{(2,8,8), (3,7,8), (4,6,8), (4,7,7), (5,5,8), (5,6,7), (6,6,6)\}$. Le triangle est représenté ci-dessus.

3. *a.* L'inégalité est transportée lorsqu'on ajoute 1 au plus petit membre et 2 au plus grand, la somme est la bonne.
b. Pour que le triplet $(x - 1, y - 1, y - 1)$ appartienne à E_{p-3}, il faut que $z - 1 < x - 1 + y - 1$, c'est-à-dire $z < x + y - 1$. Comme on a affaire à des entiers vérifiant $z < x + y$, il suffit que $z \neq x + y - 1$ et que d'autre part $x \neq 1$ pour que le nouveau triangle en soit un.
c. Si p est impair, l'égalité $x - 1 + y - 1 = z - 1$ est impossible, attendu que $x - 1 + y - 1 + z - 1$ doit être pair. Il n'y a pas de triplet $(1, y,\ z)$ dans E_{p+3}, car $1 + y + z = p + 3$ et $z < y + 1$ conduisent à $p + 3 < 2y + 1$, ou $p + 2 < 2y$, ce qui fait de y la plus grande longueur à égalité avec z, mais $y + z$ est impair, puisque $p + 3$ est pair. Les deux ensembles ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.
a. Oui, car $2\,019 = 3\times673$.
b. Deux sortes de triangles isocèles sont a priori possibles : ceux dont les côtés égaux ont la plus petite longueur et ceux dont les côtés égaux ont la plus grande. Les triplets (x, x, z) tels que $2x + z = 2\,019$ et $z > x$ vérifient $3x < 2019 < 4x$, car $z < 2x$. On a donc $x \in \{504, 505, \dots, 671, 672\}$.
Les triplets (x, z, z) tels que $x + 2z = 2\,019$ vérifient $674 < z < 1\,009$ et donc $z \in \{675, 676, \dots, 1\,007, 1\,008\}$.
Il y a en tout $168 + 336 = 504$ triangles isocèles non équilatéraux dans E_{2019}.
c. Le triplet (x, y, z) correspond à un triangle rectangle de périmètre 2 019 si $z^2 = x^2 + y^2$ et $x + y + z = 2\,019$.
On a donc : $2\,019^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y)z + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 + 2(2\,019 - x - y)(x + y) + 2xy$
$= 4\,038(x + y) - 2xy$.
Mais ce dernier nombre est pair. Donc le problème n'a pas de solution.

5. ***a.*** Ces conditions sont celles données dans la définition.
b. La somme des trois longueurs vaut bien 2 022, les deux conditions imposent $2\,022 - x - y \geq y$, donc $2\,022 - x - y > 0$, et $2\,022 \geq y + 1\,012$ qui donne l'ordre.



c. Le triangle – appelé ici ABC par commodité - est reproduit sur la figure de droite. L'angle droit est à l'intersection des droites de pentes 1 et −1. Les points à coordonnées entières de la droite d'équation $y = x$ sont les points d'abscisse entière comprise entre l'abscisse de A (506) et celle de B (674). Les points à coordonnées entières sur le côté [AC] d'équation $y = 1\,012 - x$ sont aussi ceux dont l'abscisse est entière supérieure ou égale à 2 et inférieure ou égale à 506. Les points à coordonnées entières sur le côté [BC] sont aussi ceux dont l'abscisse est paire (l'équation de la droite est $y = 1\,022 - \frac{x}{2}$) et comprise entre 2 et 674.
Au total, cela en fait 1 011, mais les sommets du triangle ont été comptés chacun deux fois. L'effectif cherché est donc 1 008. L'aire du triangle rectangle est 84 672 (demi-produit des longueurs des cathètes).
d. On utilise la formule pour trouver le nombre de points intérieurs à partir de l'aire et du nombre de points sur le périmètre (attention à ne pas compter A, B et C deux fois). On trouve le nombre de triplets dans $E_{2\,022}$, qui est le même d'après la question **3.** que dans $E_{2\,019}$: 84 169.

6. Une solution algorithmique
Le programme doit permettre de faire la liste des triplets d'entiers (x, y, z) pour lesquels $x + y + z = p$, $x + y > p$, et $x \leq y \leq z$. On commencera par déterminer les valeurs extrêmes de z, ce qui nécessite d'étudier la parité et la divisibilité par 3 de p. On distinguera 6 cas :

Il existe un entier q tel que :	Valeur maximale de z	Valeur minimale de z
$p = 6q$	$3q - 1$	$2q$
$p = 6q - 1$	$3q - 1$	$2q - 1$
$p = 6q - 2$	$3q - 2$	$2q - 1$
$p = 6q - 3$	$3q - 2$	$2q - 1$
$p = 6q - 4$	$3q - 3$	$2q - 2$
$p = 6q - 5$	$3q - 3$	$2q - 2$

Une fois déterminés ce minimum et ce maximum, on programme une boucle de z_{min} à z_{max}. Dans cette boucle, à chaque valeur de z sont associées successivement les valeurs de x allant de 1 à $\left[\frac{z}{2}\right]$ (*partie entière*). À chacune des valeurs de x correspond une seule valeur de y telle que $x \leq y \leq z$ et $z < x + y$.

Autre déroulé : on peut aussi utiliser une boucle **For** sur la plus petite des longueurs, x, et à chaque tour de boucle boucler sur y.