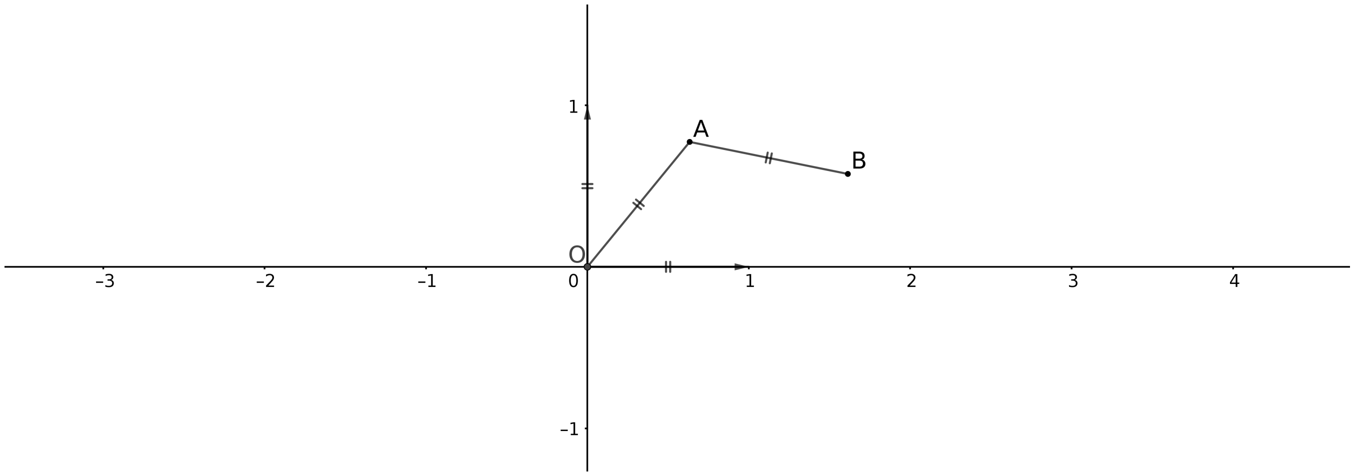
Exercice académique numéro 2

Des allumettes à la chaîne

On dispose d'une boîte d'allumettes mesurant toutes une unité de longueur. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et d'origine *O* de coordonnées *(0 ; 0)*. On trace une chaîne avec les allumettes en partant du point *O*. Chaque allumette commence là où la précédente termine... jusqu'à l'extrémité libre de la dernière allumette, que l'on appelle l'arrivée du chemin.

Dans l'exemple ci-dessous, on a deux allumettes, *[OA]* et *[AB]*, et le point *B* est l'arrivée.
Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan, quitte à utiliser suffisamment d'allumettes.



Dans un premier temps, on cherche à montrer que l'on peut atteindre tout point de l'axe des abscisses.

1. Tracer, sur l'annexe, un chemin qui permette d'atteindre le point de coordonnées (2 ; 0).

2. En déduire une méthode pour atteindre les points de coordonnées $(n\,;0)$ avec *n* entier naturel.

Si n = 0, aucune allumette n'est nécessaire.
Sinon, on aligne *n* allumettes à la suite, aux points de coordonnées $A_k=(k\,;0)$ avec $1\leq k\leq n$.

3. Soit x un réel. Supposons atteint le point de coordonnées $(x\,;0)$.

a. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x+1\,;0)$.

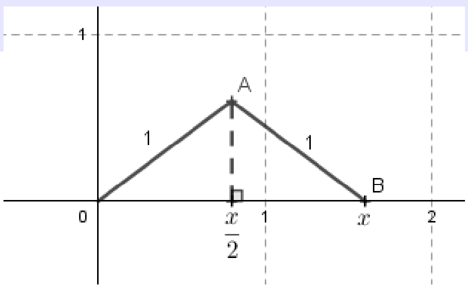
Si on a atteint le point de coordonnées $(x\,;0)$, on rajoute une allumette joignant les points de coordonnées $(x\,;0)$ et $(x+1\,;0)$. La distance entre ces deux points est bien égale à $(x+1)-x=1$.

b. Expliquer de même comment atteindre le point de coordonnées $(x-1\,;0)$.

Si on a atteint le point de coordonnées $(x\,;0)$, on rajoute une allumette joignant les points de coordonnées $(x\,;0)$ et $(x-1\,;0)$. La distance entre ces deux points est bien égale à $x-(x-1)=1$.

4. Soit x un réel dans l'intervalle $[-2;2]$. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$ avec une chaîne de 2 allumettes. On pourra s'appuyer sur un schéma.

On définit les points $A\left(\frac{x}{2};\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)$ et $B(x\,;0)$.



On place les deux allumettes, une de *O* à *A* et une de *A* à *B* . Comme x est un réel dans l'intervalle $[-2;2]$, on vérifie que $1-\frac{x^2}{4}\geq 1-\frac{4}{4}\geq 0$ donc l'ordonnée du point *A* est bien définie.
Il reste à prouver que *OA = AB = 1*.
D'une part, $OA^2=\left(\frac{x}{2}-0\right)^2+\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-0\right)^2=\frac{x^2}{4}+1-\frac{x^2}{4}=1.$
D'autre part, $AB^2=\left(x-\frac{x}{2}\right)^2+\left(0-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2=\frac{x^2}{4}+1-\frac{x^2}{4}=1.$
On a bien *OA = AB = 1*.

5. En déduire que l'on peut atteindre tous les points de l'axe des abscisses.

Soit *(y ; 0)* les coordonnées d'un point de l'axe des abscisses.

Si $-2\leq y\leq 2$, d'après la question 4, on peut faire un chemin de O à ce point en utilisant deux allumettes.

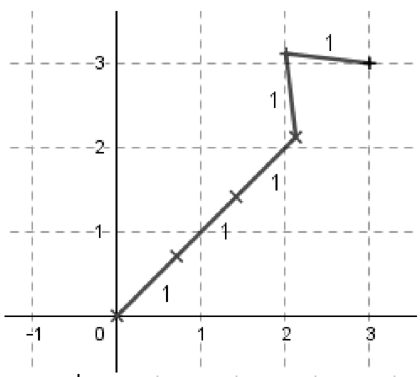
Sinon, il existe un entier relatif *n* tel que $|y-n|\leq 2$. D'après la question 4, on peut atteindre le point de coordonnées $(y-n;0)$ avec deux allumettes. Ensuite, comme dans la question 3, en rajoutant $|n|$ allumettes, on peut aller du point de coordonnées $(y-n;0)$ à celui de coordonnées $(y-n+n;0)=(y;0)$.
On peut donc bien atteindre tous les points de l'axe des abscisses.

6. Expliquer comment atteindre chaque point du plan.

Soit $(x;y)$ les coordonnées d'un point du plan. On note $r=\sqrt{x^2+y^2}$. On peut, d'après la question précédente, atteindre le point de coordonnées $(r;0)$ à partir du point *O* . Maintenant, si on tourne ce chemin autour de *O*, on peut atteindre tous les points qui sont sur le cercle de centre *O* et de rayon *r* , en particulier le point de coordonnées $(x;y)$.

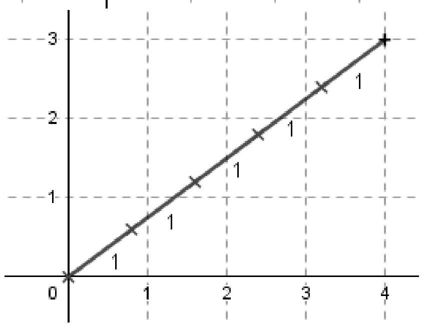
7. On s'intéresse maintenant au nombre minimal d'allumettes nécessaires pour atteindre un point donné.

a. Tracer, sur l'annexe, un chemin de longueur minimale, pour atteindre le point de coordonnées $(3;3)$.



On attend un chemin de longueur 5.

b. Même question pour le point de coordonnées $(4;3)$.



On attend un chemin de longueur 5.

c. Soit x un réel. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$ en fonction de x.

<u>Si x est un nombre relatif :</u>

Il suffit de $|x|$ allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$.
Comme une allumette est de longueur 1, alors il n'est pas possible d'atteindre ce point avec moins de $|x|$ allumettes .

<u>Si x n'est pas un entier relatif</u> :

- Si 0<x<1 ou -1<x<0 : il suffit de deux allumettes (cf question 4) ;
- si x > 1 ou x< - 1 : il suffit de $|e(x)|+1$ allumettes, où *e*(x) est la partie avant la virgule de x.
  En effet, d'après la question 4, on peut utiliser deux allumettes pour atteindre le point de coordonnées $\left(x-\left(|e(x)|-1\right);0\right)$ car | $x-\left(|e(x)|-1\right)$ | < 2.
  On en utilise $|e(x)|-1$ de plus pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$.

d. Soient x et y deux réels. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;y)$ en fonction de x et y.

D'après la question 6, il suffit d'autant d'allumettes pour atteindre ce point que pour atteindre celui de coordonnées $\left(\sqrt{x^2+y^2};0\right)$. D'après la question précédente, si $\sqrt{x^2+y^2}$ est un nombre entier alors il faut $\sqrt{x^2+y^2}$ allumettes. Dans le cas contraire, il faut $E\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+1$ allumettes.