Exercice académique numéro 1 : *Les nombres heureux*

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.

On définit ensuite la suite $\left(S_n(N)\right)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\left(S_n(N)\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

$S_1(4) = S(4) = 4^2 = 16$ et $S_2(4) = S\left(S_1(4)\right) = S(16) = 1^2 + 6^2 = 37$

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

$$S_3(4) = S\left(S_2(4)\right) = S(37) = 3^2 + 7^2 = 58$$

$$S_4(4) = S\left(S_3(4)\right) = S(58) = 5^2 + 8^2 = 89$$

$$S_5(4) = S\left(S_4(4)\right) = S(89) = 8^2 + 9^2 = 145$$

$$S_6(4) = S\left(S_5(4)\right) = S(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$$

$$S_7(4) = S\left(S_6(4)\right) = S(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$S_8(4) = S\left(S_7(4)\right) = S(20) = 2^2 + 0^2 = 4$$

La suite $(S_n(4))$ est donc une suite 8-périodique qui ne prend pas 1 comme valeur sur ses huit premiers termes.

Par conséquent, aucun de ses termes n'est égal à 1 et 4 n'est pas un nombre heureux.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

$$S_1(7) = S(7) = 7 = 49$$

$$S_2(7) = S\left(S_1(7)\right) = S(49) = 4^2 + 9^2 = 97$$

$$S_3(7) = S\left(S_2(7)\right) = S(97) = 9^2 + 7^2 = 130$$

$$S_4(7) = S\left(S_3(7)\right) = S(130) = 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$$

$S_5(7) = S\left(S_4(7)\right) = S(10) = 1^2 + 0^2 = 1$: 7 est donc bien un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

On remarque que $S_1(1) = 1^2 = 1$ donc appliquer S_1 à 1 ne change pas sa valeur. Par conséquent, pour tout entier naturel *n* non nul, $S_n(1) = \mathrm{S}_{n-1}\left(S_1(1)\right) = \mathrm{S}_{n-1}(1)$: la suite $\left(\mathrm{S}_n(1)\right)$ est une suite constante.

On en déduit que pour tout entier naturel *n ≥ 1*, $\mathrm{S}_n(1) = 1$.

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Soit *k* un entier naturel, $S_1\left(10^k\right) = 1^2 = 1$ donc toute puissance de 10 est un nombre heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

Comme $S_1(319) = 3^2 + 1^2 + 9^2 = 9^2 + 3^2 + 1^2 = S_1(931)$, on en déduit que pour tout entier naturel *n* supérieur à 2 on a $S_n(319) = S_{n-1}(S_1(319)) = S_{n-1}(S_1(931)) = S_n(931)$.

Comme 319 est un nombre heureux, il existe un entier naturel *n ≥ 1* tel que $S_n(319) = 1$.

Par conséquent, $S_n(931) = 1$ et 931 est aussi un nombre heureux.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

On reprend le raisonnement précédent en remarquant que l'image de ces deux nombres par S_1 est le même car ils sont composés des mêmes chiffres.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *N* est un nombre heureux, alors il existe un nombre entier *m* non nul tel que $S_m(N) = 1$.

Par conséquent, si *n* < *m*, $S_{m-n}(S_n(N)) = S_m(N) = 1$ et donc $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *n* > *m*, alors $S_n(N) = S_{n-m}(S_m(N)) = S_{n-m}(1) = 1$ et on aboutit à la même conclusion.

Si *n* = *m*, alors $S_n(N) = 1$

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

On peut écrire $N = \overline{ab}$ avec *a* et *b* entiers naturels inférieurs à 9.

Alors $S(N) = a^2 + b^2$ et $S(N) \leqslant 9^2 + 9^2$, donc $S(N) \leqslant 162$.

Soit M un entier supérieur à 100 et inférieur à 162.

Alors, on peut écrire $M = \overline{cde}$ avec *c*, *d* et *e* entiers naturels avec $c = 1$, $d \leq 6$ et $e \leq 9$.

Alors $S(M) = c^2 + d^2 + e^2$ et $S(M) \leqslant 1^2 + 6^2 + 9^2$, donc $S(M) \leq 118 \leq 162$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$. On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

Pour n allant de 1 à M,

c ← N-100a-10b

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

L = {113 ; 11 ; 2 ; 4}

4. On appelle point fixe de S un entier N tel que $S(N) = N$.

Le but de cette question est de démontrer que 0 et 1 sont les seuls entiers inférieurs ou égaux à 99, points fixes de S.

Notons a le chiffre des dizaines de l'entier N et b son chiffre des unités.

On peut ainsi écrire : $N = 10a + b$, avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9.

a. Démontrer que $S(N) = N$ si et seulement si $(2a - 10)^2 + (2b - 1)^2 = 101$.

$S(N) = N \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 10a + b$

$\Leftrightarrow a^2 - 10a + b^2 - b = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 40a + 4b^2 - 4b = 0$

$\Leftrightarrow (2a - 10)^2 - 100 + (2b - 1)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2a - 10)^2 + (2b - 1)^2 = 101$

b. On admet qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $x^2 + y^2 = 101$. Justifier que l'on a nécessairement $|x| \leq 10$ et $|y| \leq 10$.

$x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$

Donc si $x^2 + y^2 = 101$, alors $x^2 \leq 101$ et $y^2 \leq 101$

alors $-\sqrt{101} \leq x \leq \sqrt{101}$ et $-\sqrt{101} \leq y \leq \sqrt{101}$

Or x et y sont des entiers relatifs, donc $-10 \leq x \leq 10$ et $-10 \leq y \leq 10$

On en déduit que si $x^2 + y^2 = 101$, alors $|x| \leq 10$ et $|y| \leq 10$

c. En déduire que $b \leq 5$.

D'après les questions précédentes, on a $|2b - 1| \leq 10$, soit $-10 \leq 2b - 1 \leq 10$

On en déduit $-4.5 \leq b \leq 5.5$

Or b est un entier naturel, donc $0 \leq b \leq 5$

d. Conclure.

Si $b = 0$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 0 - 1)^2 = 100$. Donc $|2a - 10| = 10$ et donc a $= 0$.

Si $b = 1$, alors de même $|2a - 10| = 10$ et donc a $= 0$.

Si $b = 2$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 2 - 1)^2 = 92$ qui n'est pas un carré, donc aucun nombre ne convient.

Si $b = 3$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 3 - 1)^2 = 76$ qui n'est pas un carré.

Si $b = 4$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 4 - 1)^2 = 52$ qui n'est pas un carré.

Si $b = 5$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 5 - 1)^2 = 20$ qui n'est pas un carré.

Donc les seules possibilités sont *N = 0* et *N = 1*.