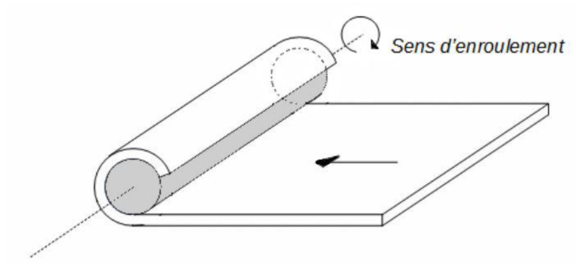
# Exercice académique numéro 1

***Ça tourne rond***

On dispose d'un rouleau circulaire sur lequel on souhaite enrouler une certaine longueur de revêtement isolant formant ainsi plusieurs couches successives.

Fig 1. Vue de profil



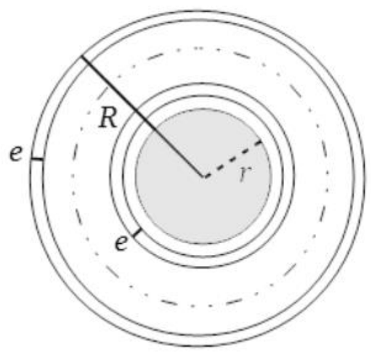

Lors de cet enroulement, on considère que les couches successives sont enroulées de façon parfaitement circulaire et que les tours réalisés sont complets.

Dans tout l'exercice, l'épaisseur du revêtement isolant est notée $e$, le rayon du rouleau circulaire est noté $r$ et la longueur totale du revêtement isolant enroulé est notée $L$.

L'épaisseur totale, revêtement isolant et rouleau compris, est notée $R$.

**Les surfaces considérées dans les questions de l'exercice ne concernent que la vue de côté ci-dessous, c'est-à-dire, le disque de rayon $r$, le disque de rayon $R$ ou la couronne constituée du revêtement.**

Fig 2. Vue de côté




## Partie A : étude théorique

**1.** Exprimer en fonction de $R$ et $r$, l'aire de la couronne située entre le rouleau et la couche supérieure de revêtement isolant.

$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

**2.** Justifier que l'on a l'égalité entre surfaces : $L \times e = \pi(R^2 - r^2)$.

$L \times e$ est l'aire du rectangle de longueur $L$ et d'épaisseur $e$ correspondant au revêtement déroulé.
$\pi(R^2 - r^2)$ est l'aire de la couronne située entre le rouleau et la couche supérieure de revêtement.
Ces deux aires sont égales, d'où l'égalité $L \times e = \pi(R^2 - r^2)$..

**3.** Justifier que $R - r = n \times e$ et que $R + r = 2\,r + n \times e$.

$R - r$ est la longueur séparant le tube de la surface du rouleau. Elle est égale à $n \times e$ car il y a $n$ couches d'épaisseur $e$. Donc $R - r = n \times e$.
De plus, $R + r = (n \times e + r) + r = 2r + n \times e$.

**4.** En déduire les relations suivantes : $L = \pi\, n\,(R + r)$ et $L = \pi\, n\,(2\,r + n \times e)$ .

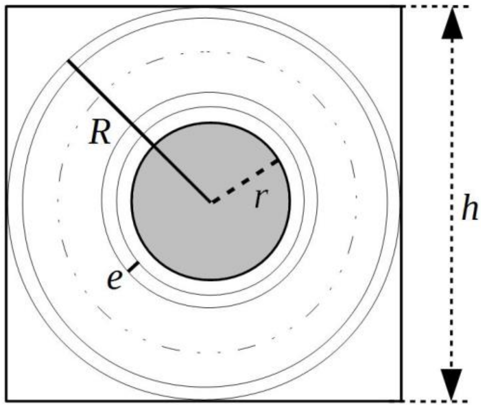
D'après la question 2, $L = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{e}$. D'où $L = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{e} = \frac{\pi(\mathrm{R}-\mathrm{r})(R+r)}{e} = \frac{\pi \times n \times e(R+r)}{e} = \pi\, n\,(R + r)$.
D'après la question 3, $L = \pi\, n\,(R + r) = \pi\, n\,(2r + n \times e)$.

## Partie B : applications numériques

Toutes les applications numériques se feront en prenant $r = 250\text{mm}$ et $e = 5\text{mm}$
Dans cette partie, on pourra utiliser les formules énoncées dans la partie A .

**1.** On compte autour du rouleau 50 tours complets de revêtement isolant.
Déterminer en mètre, la longueur totale de revêtement enroulé. *Arrondir au mm .*

$L = \pi\, n\,(2r + n \times e) = \pi \times 50\,(2 \times 250mm + 50 \times 5mm) \approx 117{,}810\, m.$




**2.** Le rouleau complet après enroulement du revêtement isolant doit pouvoir rentrer dans une boîte dont l'une des faces est un carré de côté $h = 150$ cm.

a. Déterminer le nombre de couches de revêtement.

$$2R \leq h \Leftrightarrow R \leq \frac{h}{2} \Leftrightarrow n \times e + r \leq \frac{h}{2} \Leftrightarrow n \leq \frac{\frac{h}{2} - r}{e}$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{\frac{150cm}{2} - 25cm}{0{,}5cm} = 100$$

b. Calculer la longueur totale de revêtement enroulé en mètres, arrondie au mm.

$$L = \pi\, n\,(2r + n \times e)$$
$$= \pi \times 100\,(2 \times 250mm + 100 \times 5mm)$$
$$\approx 314{,}159\, m$$

**3.** On dispose d'une longueur de revêtement isolant de $400\, m$.

a. Déterminer le nombre maximal de tours complets possibles.

b. Calculer la longueur de revêtement isolant qui ne sera pas enroulé en mètres, arrondie au mm.

| $n$ | $L$ (en m) |
|---|---|
| 104 | 333,260148693 |
| 105 | 338,113909343 |
| 106 | 342,999085919 |
| 107 | 347,915678422 |
| 108 | 352,863686851 |
| 109 | 357,843111207 |
| 110 | 362,85395149 |
| 111 | 367,896207699 |
| 112 | 372,969879834 |
| 113 | 378,074967896 |
| 114 | 383,211471885 |
| 115 | 388,3793918 |
| 116 | 393,578727642 |
| 117 | 398,80947941 |
| 118 | 404,071647105 |
| 119 | 409,365230726 |
| 120 | 414,690230274 |

D’après le tableau de valeurs, il est possible de faire au maximum 117 tours et il restera environ 1,19 m d’isolant qui ne sera pas enroulé.

## Exercice académique numéro 2 : *Les nombres heureux*

On considère un entier naturel $N$ et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de $N$.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.

On définit ensuite la suite $\big(S_n(N)\big)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\big(S_n(N)\big) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

***Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux***

**1.** **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

$S_1(4) = S(4) = 4^2 = 16$ et $S_2(4) = S\big(S_1(4)\big) = S(16) = 1^2 + 6^2 = 37$

**b.** Calculer $S_n(4)$ pour tout entier $n$ compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

$$S_3(4) = S\big(S_2(4)\big) = S(37) = 3^2 + 7^2 = 58$$
$$S_4(4) = S\big(S_3(4)\big) = S(58) = 5^2 + 8^2 = 89$$
$$S_5(4) = S\big(S_4(4)\big) = S(89) = 8^2 + 9^2 = 145$$
$$S_6(4) = S\big(S_5(4)\big) = S(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$$
$$S_7(4) = S\big(S_6(4)\big) = S(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$S_8(4) = S\big(S_7(4)\big) = S(20) = 2^2 + 0^2 = 4$$

La suite $(S_n(4))$ est donc une suite 8-périodique qui ne prend pas 1 comme valeur sur ses huit premiers termes.

Par conséquent, aucun de ses termes n'est égal à 1 et 4 n'est pas un nombre heureux.

**2.** Justifier que *7* est un nombre heureux.

$$S_1(7) = S(7) = 7 = 49$$
$$S_2(7) = S\big(S_1(7)\big) = S(49) = 4^2 + 9^2 = 97$$
$$S_3(7) = S\big(S_2(7)\big) = S(97) = 9^2 + 7^2 = 130$$
$$S_4(7) = S\big(S_3(7)\big) = S(130) = 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$$

$S_5(7) = S\big(S_4(7)\big) = S(10) = 1^2 + 0^2 = 1$ : 7 est donc bien un nombre heureux.

**3.** **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$ ?

On remarque que $S_1(1) = 1^2 = 1$ donc appliquer $S_1$ à 1 ne change pas sa valeur. Par conséquent, pour tout entier naturel *n* non nul, $S_n(1) = \mathrm{S}_{n-1}\big(S_1(1)\big) = \mathrm{S}_{n-1}(1)$ : la suite $\big(\mathrm{S}_n(1)\big)$ est une suite constante.

On en déduit que pour tout entier naturel *n ≥ 1*, $\mathrm{S}_n(1) = 1$.

**b.** Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Soit *k* un entier naturel, $S_1\big(10^k\big) = 1^2 = 1$ donc toute puissance de 10 est un nombre heureux.

*Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux*

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

**1.** **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

Comme $S_1(319) = 3^2 + 1^2 + 9^2 = 9^2 + 3^2 + 1^2 = S_1(931)$, on en déduit que pour tout entier naturel *n* supérieur à 2 on a $S_n(319) = S_{n-1}(S_1(319)) = S_{n-1}(S_1(931)) = S_n(931)$.

Comme 319 est un nombre heureux, il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $S_n(319) = 1$.

Par conséquent, $S_n(931) = 1$ et 931 est aussi un nombre heureux.

**b.** Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

On reprend le raisonnement précédent en remarquant que l'image de ces deux nombres par $S_1$ est le même car ils sont composés des mêmes chiffres.

**2.** Démontrer que si $N$ est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *N* est un nombre heureux, alors il existe un nombre entier *m* non nul tel que $S_m(N) = 1$.

Par conséquent, si $n < m$, $S_{m-n}(S_n(N)) = S_m(N) = 1$ et donc $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si $n > m$, alors $S_n(N) = S_{n-m}(S_m(N)) = S_{n-m}(1) = 1$ et on aboutit à la même conclusion.

Si $n = m$, alors $S_n(N) = 1$

**3.** On suppose que $N$ est un entier inférieur ou égal à *99*.

**a.** Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

On peut écrire $N = \overline{ab}$ avec *a* et *b* entiers naturels inférieurs à 9.

Alors $S(N) = a^2 + b^2$ et $S(N) \leqslant 9^2 + 9^2$, donc $S(N) \leqslant 162$.

Soit $M$ un entier supérieur à 100 et inférieur à 162.

Alors, on peut écrire $M = \overline{cde}$ avec *c*, *d* et *e* entiers naturels avec $c = 1$, $d \leq 6$ et $e \leq 9$.

Alors $S(M) = c^2 + d^2 + e^2$ et $S(M) \leqslant 1^2 + 6^2 + 9^2$, donc $S(M) \leq 118 \leq 162$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

**b.** Soit $M$ un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre $N$ donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour $n$ entier, $1 \leq n \leq M$. On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

Pour $n$ allant de 1 à M,

c ← N-100a-10b

**c.** On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

L = {113 ; 11 ; 2 ; 4}