Correction de l'exercice académique numéro 1

Nombres similaires

On dit que deux nombres entiers non nuls sont similaires si on peut réorganiser les chiffres de l'un pour obtenir l'autre. On ne peut pas mettre de zéro en première position : *01* est le nombre *1*. Par exemple, les nombres *17* et *71* sont similaires, les nombres *584*, *485* et *548* sont similaires, et *10* et *1* ne sont pas similaires. Deux nombres similaires ont donc le même nombre de chiffres.
Soit n un entier naturel non nul. On range les nombres entre *1* et n dans des boîtes, en regroupant les nombres similaires dans une même boîte. On cherche à savoir combien de boîtes sont nécessaires pour faire cela. On note ce nombre de boîtes $f(n)$.

Partie 1

1. Pour tout n compris entre *1* et *9*, déterminer $f(n)$.

Pour tout n compris entre *1* et *9*, $f(n) = n$ car tous les nombres compris entre 1 et n s'écrivent avec un chiffre différent.

2. Donner l'exemple d'une boîte contenant exactement deux nombres similaires.

La boîte contenant le nombre 12 contient exactement deux nombres similaires : 12 et 21.

3. On cherche à calculer $f(99)$. Dans cette question, on considère les nombres entiers à deux chiffres.

a. Si un nombre entier à deux chiffres comporte un zéro, peut-il être similaire à un autre nombre ? Combien de nombres à deux chiffres possèdent un zéro ?

Non, car on ne peut pas changer l'ordre des chiffres sans mettre le zéro en première position, ce qui est interdit. Les nombres à deux chiffres avec un zéro sont 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, il y en a donc 9.

b. Les nombres s'écrivant avec 2 chiffres identiques non nuls sont-ils similaires à d'autres nombres ?

Il s'agit des nombres 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Si l'on change l'ordre de leurs chiffres, ils sont égaux seulement à eux-mêmes. Ils ne peuvent donc pas être similaires à d'autres nombres.

c. Si un nombre s'écrit avec deux chiffres différents non nuls, à combien d'autres nombres est-il similaire ? Combien de boîtes sont-elles nécessaires pour ranger tous les nombres avec deux chiffres différents non nuls ?

Si a et b sont deux chiffres distincts non nuls, alors les nombres s'écrivant ab et ba sont similaires. Les nombres qui s'écrivent sous la forme ab avec a et b deux chiffres différents sont au nombre de 72. On a en effet 9 choix pour a, et 8 choix pour b (qui ne peut juste pas être égal à a), et 9*8=72. Ce qui fait un total de 36 paires de nombres similaires.

4. En déduire que *f(99)=63*.

On compte 9 nombres inférieurs à 9, 9 nombres à deux chiffres avec un zéro, et 9 nombres dont les deux chiffres sont identiques. À ces nombres, on rajoute les 36 de la forme ab avec a et b distincts non zéros. Finalement, 63 boîtes sont nécessaires pour classer les nombres compris entre 1 et 99. Ainsi *f(99)=63*.

Partie 2

On pourra réutiliser dans cette partie les résultats de la partie 1 sans démonstration.
Le but de cette partie est de calculer *f(999)*.
On admet que l'on peut regrouper les nombres entre *1* et *999* en *4* catégories :
A : Les nombres qui sont inférieurs ou égaux à 99.
B : Les nombres qui ont trois chiffres et dont au moins un est un zéro.
C : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et au moins deux chiffres identiques.
D : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et dont les chiffres sont tous différents.

1. Expliquer pourquoi, si deux nombres appartiennent à des catégories différentes, ils ne peuvent pas être similaires.

On va pour cela montrer que si un nombre est dans une catégorie, tous les nombres qui lui sont similaires sont dans la même catégorie.
Pour la catégorie A : les nombres ont un ou deux chiffres. En changeant leur ordre, on ne change pas le nombre de chiffres, et on reste donc dans cette catégorie.
Pour la catégorie B : changer l'ordre des chiffres ne change pas la valeur des chiffres, et donc un nombre similaire a un nombre de la catégorie B a aussi un zéro, et est donc dans cette catégorie.
Pour la catégorie C : changer l'ordre des chiffres ne change pas le nombre de chiffres qui sont égaux entre eux.
Pour la catégorie D : le même raisonnement marche.

2. Montrer qu'il faut 54 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie B.

Les nombres qui ont deux zéros sont 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. Ils ne sont similaires à aucun autre nombre, sinon il y aurait un 0 en première position. Donc 9 boîtes sont nécessaires pour ranger ces nombres de la catégorie B. Ceux qui ont un zéro sont de la forme a0b ou ab0, avec a et b non nuls. On remarque que a0b et b0a sont similaires. Il faut donc compter uniquement ceux de la forme ab0. En distinguant le cas a = b ou a ≠ b, le nombre de boîtes nécessaires pour ranger ces nombres de la catégorie B est 9 + 36 = 45. Finalement, pour la catégorie B, 54 boîtes sont nécessaires pour ranger tous les nombres.

3. Montrer qu'il faut 33 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie C.

Les nombres 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999 ne sont similaires à aucun autre : il faut 9 boîtes pour les ranger. Tous les autres nombres de la catégorie C de la forme aab, aba ou baa, avec a et b non nuls, sont similaires. Il faut donc $9 \times 8 \div 3 = 24$ boîtes pour ranger tous ces nombres. Finalement, pour la catégorie C, 9 + 24 = 33 boîtes sont nécessaires pour ranger tous les nombres.

4. Déterminer le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les nombres de la catégorie D.

Si a, b et c sont trois chiffres distincts, alors abc, acb, bac, bca, cab et cba sont similaires, et ne sont similaires à aucun autre nombre. Il faut donc les regrouper par 6. Le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les nombres de la catégorie D est donc le nombre de nombres dans cette catégorie, divisé par 6. Les nombres de D sont de la forme abc, avec a, b et c non nuls et distincts, il y en a donc $9 \times 8 \times 7 = 504$. Finalement, pour la catégorie D, 504/6=84 boîtes sont nécessaires pour ranger tous les nombres.

5. En déduire la valeur de *f(999).*

Il suffit d'additionner les quantités calculées dans les questions précédentes, ce qui donne 63+54+33+84=234.

Exercice académique numéro 2

Le cavalier errant

On considère un tableau de nombres placés en diagonale dans des cases comme suit :

1	2	4	7	11	16	22	…	…
3	5	8	12	17	23	…		
6	9	13	18	24	…			
10	14	19	25	…				
15	20	26	…					
21	27	…						
28	…							
…								
…								

Un cavalier se déplace sur ces cases. Il peut se déplacer sur les huit cases de A à H comme suit (on a représenté le cavalier par ♞) :

	A		B	
C				D
		♞		
E				F
	G		H	

Schéma des 8 positions

Le cavalier débute sur la case contenant le nombre 1. Parmi les cases qu'il peut atteindre, il va sur celle qui a le plus petit nombre, et qu'il n'a pas encore visitée. Par exemple, pour son premier mouvement, il peut atteindre les cases contenant les nombres 8 et 9, il va donc sur la case contenant 8. Son deuxième mouvement l'amène sur la case contenant le nombre 6.

Si toutes les cases qu'il peut atteindre ont déjà été visitées, il est bloqué.

1. Donner dans l'ordre les nombres des dix premières cases visitées par le cavalier. Aucune justification n'est demandée.

1 → 8 → 6 →2 →12 →9 →4 →3 →13 →7 →5 →10

On nomme, comme dans le *Schéma des 8 positions* ci-dessus, les cases A à H qui sont accessibles pour le cavalier.

2. **a.** Des cases A et C, laquelle contient le plus petit nombre ? Justifier.

L’échiquier étant construit diagonale descendante par diagonale descendante, de la gauche vers la droite, c’est la case A qui a le plus petit numéro car elle se situe le plus en haut à gauche.

b. Même question pour les cases A et B. Justifier.

La case A a le plus petit numéro car elle se situe sur la même ligne que B mais à gauche de B.

c. Plus généralement, classer les cases de A à H par ordre croissant du nombre qu'elle contient. La justification n'est pas attendue.

A < C < B < E < D < G < F < H

On repère les cases du tableau grâce au couple $(\ell ; c)$, ℓ étant le numéro de la ligne et c celui de la colonne. La case en haut à gauche est la case (1;1).

					colonne c ▼		
	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	..
	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	…	..
	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	…	…	..
	(4;1)	(4;2)	(4;3)	…	…	…	..
	(5;1)	(5;2)	…	…	…	…	..
ligne l ►	…	…	…	…	(l;c)	…	..
	…	…	…	…	…	…	..

3. **On suppose dans cette question qu'aucune des 8 positions, que le cavalier peut atteindre, n'a été atteinte auparavant.**

a. Si on note $(\ell ; c)$ la case sur laquelle le cavalier se trouve, par quels couples, en fonction de ℓ et de c, note-t-on les cases A à H du *Schéma des 8 positions* ?

A$(\ell - 2 ; c - 1)$ B$(\ell - 2 ; c + 1)$ C$(\ell - 1 ; c - 2)$ D$(\ell - 1 ; c + 2)$

E$(\ell + 1 ; c - 2)$ F$(\ell + 1 ; c + 2)$ G$(\ell + 2 ; c - 1)$ H$(\ell + 1 ; c + 2)$

b. À partir de quel numéro de ligne et quel numéro de colonne, le cavalier doit-il se trouver pour qu'aucune des huit positions ne sorte du tableau ?

On doit avoir $\ell \geq 3$ et $c \geq 3$.

c. Si le cavalier se trouve sur la première ligne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des colonnes 1, 2 et suivantes.

d. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième ligne.

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3 et plus
Ligne 1	F	G	E
Ligne 2	D	G	C

e. Si le cavalier se trouve sur la première colonne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des lignes 1, 2 et suivantes.

f. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième colonne.

	Ligne 1	Ligne 2	Ligne 3 et plus
Colonne 1	F	D	B
Colonne 2	G	D	A

4. On se propose d'écrire un algorithme permettant de construire la liste des nombres successivement rencontrés lors du parcours du cavalier. Pour cela on dispose d'une boucle et de cinq procédures :

P1 : Élimination des nombres déjà visités d'une liste donnée.

P2 : Positionnement sur la case choisie par la procédure précédente.

P3 : Recherche du minimum d'une liste non vide de nombres, et arrêt si liste vide.

P4 : Positionnement sur la case contenant le nombre 1.

P5 : Liste des nombres contenus dans les cases accessibles.

Donner, dans l'ordre de leur exécution, les procédures permettant de construire le parcours du cavalier en entourant par un couple de parenthèses le groupe des procédures qui s'effectueront en boucle.

P4 (P5,P1,P3,P2)

5. Pour n entier naturel, on note $T(n)$ le n-ième nombre triangulaire. On admet que $T(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

On admet que le nombre *u* situé à la ligne numéro $\boldsymbol{\ell}$ et la colonne numéro ***c*** est donné par la formule :

$$u = \boldsymbol{\ell} + T(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\ell} - 2).$$

a. Vérifier que la formule donne bien le nombre 1 contenu dans la case (1 ; 1).

u = 1 + T(1 + 1 - 2) = 1 + T(0) = 1 + 0 = 1.

b. On suppose dans cette question que $c \geq 2$. On se place dans la case contenant le nombre u à la ligne numéro ℓ et à la colonne numéro c. On se déplace d'une seule case vers le bas puis d'une seule case vers la gauche.

c. Vérifier à l'aide de la formule que le nombre contenu dans la case d'arrivée est le nombre $u + 1$.

$\ell + 1 + T(c - 1 + \ell + 1) = \ell + T(c - \ell - 2) + 1 = u + 1.$

d. On suppose dans cette question que $c = 1$. À l'aide de la formule, donner en fonction de u le numéro de la colonne où se trouve le nombre $u + 1$, situé alors sur la ligne 1.

On doit résoudre $u + 1 = 1 + T(c + 1 - 2) \Leftrightarrow u = T(c - 1) \Leftrightarrow 2u = c(c - 1) \Leftrightarrow c^2 - c - 2u = 0$ de discriminant $1 + 8u > 0$. Cette équation admet deux solutions réelles dont seule la solution positive peut être retenue : $c_+ = \frac{1+\sqrt{1+8u}}{2}$. De plus, comme $c = 1$ et $u = 1 + T(l - 1) = l + \frac{l(l-1)}{2}$, on a $1 + 8u = 1 + 8l + 4l(l - 1) = 1 + 4l + 4l^2 = (2l + 1)^2$ et c_+ est bien un nombre entier.

e. En exécutant l'algorithme de la question 4, le cavalier se trouve bloqué à la ligne 52 et la colonne 1. Sur quel nombre s'arrête-t-il ? Justifier.

$$u = 52 + T(52 + 1 - 2) = 52 + \frac{51 \times 52}{2} = 1378$$

Le cavalier avec Mathematica

```
In[ ]:= Clear[echiquier, cavapos, cavalist]
        efface
```

Les nombres triangulaires :

```
In[ ]:= t[n_Integer] := n (n + 1) / 2;
          dans
```

Construction de l'échiquier (avec bordure de 2 lignes et 2 colonnes d'infinis) :

```
In[ ]:= echiquier =
          ArrayPad[Table[l + t[c + l - 2], {l, 1, 100}, {c, 1, 100}], {{2, 0}, {2, 0}}, Infinity];
          garnis tab·· table                                                                infini
```

Échiquier de taille 8 :

```
In[ ]:= Grid[echiquier[[3 ;; 10, 3 ;; 10]]]
        grille
```

Out[ ]=

1	2	4	7	11	16	22	29
3	5	8	12	17	23	30	38
6	9	13	18	24	31	39	48
10	14	19	25	32	40	49	59
15	20	26	33	41	50	60	71
21	27	34	42	51	61	72	84
28	35	43	52	62	73	85	98
36	44	53	63	74	86	99	113

Fonction donnant les huit positions autour du cavalier, et donnant le nombre situé à la position (l,c) :

```
In[ ]:= posiposs[{l_, c_}] := {{l - 2, c - 1}, {l - 1, c - 2}, {l - 2, c + 1},
           {l + 1, c - 2}, {l - 1, c + 2}, {l + 2, c - 1}, {l + 1, c + 2}, {l + 2, c + 1}};
```

Fonctions donnant le nombre situé à la position demandée et la position du nombre demandé :

```
nbposi[{l_, c_}] := echiquier[[l, c]];
posinb[n_] := Position[echiquier, n][[1]];
                position
```

Terme général de la position du cavalier au rang n:

```
In[ ]:= cavapos[1] := {3, 3};
        cavapos[n_] :=
          (cavapos[n] = posinb[Min[Complement[nbposi /@ posiposs[cavapos[n - 1]], cavalist[n - 1]]]]);
                              mi·· complément
```

Liste des positions successives du cavalier :

```
In[ ]:= cavalist[1] := {};
        cavalist[n_] := (cavalist[n] = Join[cavalist[n - 1], {nbposi[cavapos[n - 1]]}]);
                                        joins
```

Graphe des mouvements du cavalier :

In[ ]:=
```
Graphics[{Arrowheads[.01], Rotate[Arrow[Table[cavapos[i], {i, 1, 2402}]], -90°]}]
```
graphique têtes de flèche tourne flèche table

Out[ ]=