Exercice académique numéro 1

À qui la crêpe ?

Ce soir, tous mes amis se sont réunis pour une soirée crêpes. Chacun se sert et mange à sa faim, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule crêpe.

1. a. Supposons que 4 personnes aient encore faim : Armand, Bilel, Chloé et Daphné. Ils tirent au sort pour déterminer la personne qui mangera la crêpe restante.
Mais ils n'ont qu'une pièce de monnaie équilibrée à deux faces.
Chloé propose la répartition suivante : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile puis Pile	Pile puis Face	Face puis Pile	Face puis Face
… mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé	Daphné

Calculer la probabilité qu'Armand mange la crêpe, la probabilité que Bilel mange la crêpe, la probabilité que Chloé mange la crêpe et la probabilité que Daphné mange la crêpe.

Le tirage au sort est-il équitable ou avantage-t-il quelqu'un en particulier ?

La probabilité qu'Armand mange la crêpe est la probabilité de l'événement « Pile puis pile ».

Les deux tirages étant indépendants, P(A mange la crêpe) = P(Pile) × P(Pile) = ¼.

Le même calcul donne P(B mange la crêpe) = P(C mange la crêpe) = P(D mange la crêpe) = ¼.

C'est donc un tirage au sort équitable.

b. En fait Daphné n'a pas très faim. 3 volontaires restent donc pour la dernière crêpe.

Bilel propose une nouvelle répartition : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile la première fois	Face puis Pile	Face puis Face
… mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé

Montrer que ce nouveau tirage au sort n'est pas équitable entre les 3 intéressés.

Les probabilités des événements « Pile puis face » et « Face puis pile » n'ont pas changé donc :
P(B mange la crêpe) = P(C mange la crêpe) = ¼.
Par ailleurs, P(A mange la crêpe) = P(le premier tirage donne Pile) = ½.
Ce tirage au sort n'est donc pas équitable.

Pour faire des tirages au sort équitables quel que soit le nombre de personnes intéressées par la dernière crêpe, Armand propose d'utiliser un dé à trois faces parfaitement équilibré. On note 1,2,3 les faces respectives du dé à trois faces.

2. a. Imaginons que 9 personnes veuillent la dernière crêpe. En lançant deux fois le dé à trois faces, proposer une méthode de tirage au sort équitable entre ces 9 personnes.

Pour tirer au sort équitablement entre 9 personnes A, B, C… I, on lance deux fois le dé à trois faces. On décrète alors que A mange la crêpe si les faces sorties sont 1 puis 1, B si ce sont les faces 1 puis 2, C si ce sont les faces 1 puis 3, D si ce sont les faces 2 puis 1, E si ce sont les faces 2 puis 2, F si ce sont les faces 2 puis 3, G si ce sont les faces 3 puis 1, H si ce sont les faces 3 puis 2, I si ce sont les faces 3 puis 3. Quel que soit le premier ou le deuxième tirage, le dé étant équilibré, P(1)=P(2)=P(3)=1/3. De plus, les deux tirages étant indépendants, P(A mange la crêpe) = P(1 puis 1) = 1/3 × 1/3 = 1/9. De même, la probabilité que chaque participant mange la crêpe est égale à 1/9.

b. Même question si 27 personnes veulent la dernière crêpe.

On peut lancer le dé à trois faces à trois reprises. L'arbre des issues a 3× 3 × 3= 27 feuilles qui sont toutes équiprobables de probabilité 1/27. Dès lors, on peut attribuer à chaque issue un des 27 participants : la première personne mange la crêpe si l'issue des trois tirages est (1, 1, 1), la deuxième si c'est (1, 1, 2), …, la 27-ième si c'est (3, 3, 3).

c. Généralisons : que faire si 3^n personnes veulent la dernière crêpe ?

On procède de même qu'à la question précédente en lançant le dé à trois face à *n* reprises.

3.a. Imaginons que 6 personnes convoitent la dernière crêpe. En lançant une fois la pièce et une fois le dé à trois faces, proposer un tirage au sort équitable entre ces 6 personnes.

Cette expérience à six issues possibles équiprobables : (Pile, 1), (Pile, 2), (Pile, 3), (Face, 1), (Face, 2), (Face, 3). Ainsi, affecter à chacun des six gourmands une des six issues décrites définit un tirage au sort équitable.

b. Que faire si 72 personnes désirent manger la dernière crêpe ?

On remarque que 72 = 8 × 9 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3. Ainsi, réaliser l'expérience aléatoire « tirer trois fois la pièce et deux fois le dé à trois faces » permet d'obtenir 72 issues équiprobables que l'on peut associer à chacune des 72 personnes en présence.

c. Soit n un nombre entier naturel dont les seuls facteurs premiers sont 2 et 3.
Par exemple, $n = 72 = 2^3 \times 3^2$.
Expliquer comment faire un tirage au sort équitable entre n amis avec la pièce et le dé à trois faces.

Si $n = 2^a \times 3^b$ avec *a* et *b* deux nombres entiers, l'expérience aléatoire « tirer *a* fois la pièce et *b* fois le dé à trois faces » permet d'obtenir *n* issues équiprobables que l'on peut associer à chacun des *n* amis.

En pratique, tout le monde ne possède pas de dé à trois faces.
Revenons à une situation plus réaliste : Armand range son dé à trois faces et nous propose d'utiliser à la place un dé équilibré à six faces.

4. a. Comment réaliser un tirage au sort équitable entre 3 personnes avec ce dé à six faces ?

On appelle A, B et C les trois amis. On lance le dé à six faces : si 1 ou 2 sort, A mange la crêpe, si 3 ou 4 sort, B mange la crêpe, si 5 ou 6 sort, C mange la crêpe. Dans tous les cas, que A, que B ou que C mange la crêpe est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et le tirage est équitable.

b. Si on utilise seulement ce dé à six faces, peut-on faire un tirage au sort équitable entre 2 personnes ?

Oui : on peut par exemple décider que la première personne gagne si un nombre pair sort et que la deuxième gagne si c'est un nombre impair.

c. Expliquer pourquoi le résultat de la question 3.c) reste vrai lorsque l'on n'a plus de pièce ni de dé à trois faces, mais seulement un dé à six faces.

Avec les mêmes notations que dans la question 3.c), il est possible de simuler les *a* lancers de pièces par *a* jets d'un dé à six faces en observant si le résultat est pair ou impair et de simuler les *b* lancers de dés à trois faces par *b* jets d'un dé à six faces en observant si le résultat est 1 ou 2 ; 3 ou 4 ; 5 ou 6.

d. Armand sort maintenant un autre dé en plus du dé à six faces : un dé équilibré à vingt faces. Il affirme qu'avec ces deux dés, il sait faire un tirage au sort équilibré pour n amis quel que soit le nombre entier n tant que ses facteurs premiers ne sont que des 2, des 3 ou des 5. Quelle est sa méthode ?

Sa méthode est proche de celle de la question précédente : il faut juste comprendre comment faire un tirage au sort équitable entre 5 personnes avec un dé à 6 faces et un dé à 20 faces. Pour cela, le dé à 20 faces suffit : si on lance une fois, les cinq issues qui suivent sont équiprobables : (1 ou 2 ou 3 ou 4) ; (5 ou 6 ou 7 ou 8) ; (9 ou 10 ou 11 ou 12) ; (13 ou 14 ou 15 ou 16) ; (17 ou 18 ou 19 ou 20). Appelons cette expérience aléatoire l'expérience *E*. Si $n = 2^a 3^b 5^c$, on répète *a* fois l'expérience de la question 3.b., *b* fois l'expérience de la question 3.a. et *c* fois l'expérience *E*. On obtient alors bien *n* issues équiprobables.

Exercice académique numéro 2
Un océan agité

Un océan est un rectangle de taille 3 x 5 composé de cases. Chaque case a un courant, c'est-à-dire une flèche vers une case voisine.

Les courants pointent toujours vers une autre case de l'océan.

Voici un exemple d'océan :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Un bateau se déplace sur l'océan. Quand il est sur une case, il se déplace sur la case voisine indiquée par le courant. Par exemple, si le bateau est sur la case en haut à gauche de l'océan ci-dessus, il se déplace d'une case vers la droite.

1. a. Le bateau commence sur la case en haut à gauche. Sur l'océan de l'annexe, tracer en bleu la trajectoire du bateau. Que remarque-t-on ?

On remarque que le bateau ne quitte pas une trajectoire fermée comportant 4 cases.

b. Le bateau commence sur la case au centre de l'océan. Sur l'océan de l'annexe, tracer en rouge la trajectoire du bateau.

Un *circuit* est un ensemble *E* de cases qui vérifie les propriétés suivantes :

- si le bateau commence sur une case de *E*, il ne sort pas de *E ;*
- le bateau visite toutes les cases de *E ;*
- le bateau repasse par sa case de départ.

Par exemple, la trajectoire bleue (de la question 1. a.) est un circuit.

2. Expliquer pourquoi la trajectoire rouge (de la question 1. b.) n'est pas un circuit.

Le bateau ne revient pas à la case de départ donc ce n'est pas un circuit.

3. Sur l'océan de l'annexe, colorier dans des couleurs différentes tous les circuits.

4. Compléter l'océan de l'annexe de façon à ce qu'il contienne un seul circuit et que ce circuit soit constitué de plus de quatre cases. Colorier ce circuit.

5. Compléter l'océan pour qu'il contienne un circuit passant par toutes les cases grisées et le colorier.

On cherche maintenant à prouver que tous les océans 3 x 5 ont au moins un circuit. On considère donc un océan de taille 3 x 5 sur lequel se déplace un bateau partant d'une case quelconque.

Dans les questions suivantes, on tiendra compte de la qualité de la rédaction.

6. a. Montrer que le bateau, après 16 mouvements, est repassé au moins deux fois par la même case.

Comme il n'y a que 15 cases, au bout de 16 mouvements, le bateau est nécessairement repassé au moins deux fois par la même case.

b. En déduire qu'il existe au moins un circuit.

D’après la question précédente, il existe au moins une case *C* sur laquelle le bateau passe au moins deux fois au bout de 16 mouvements. L’ensemble des cases parcourues par le bateau en partant de *C* forme un circuit.

On s'intéresse maintenant au nombre maximum de circuits dans l'océan.

7. a. Montrer que deux circuits ne peuvent pas se croiser.

Si deux circuits se croisent, ils partagent une case en commun et n’en forment qu’un seul.

b. Montrer que, sur un océan de taille 3 x 5, il y a au plus 7 circuits.

Les plus petits circuits sont composés de deux cases. Comme $15 = 2 \times 7 + 1$, il ne peut y avoir plus de 7 circuits dans un océan composé de quinze cases.

c. Donner sur l’annexe un exemple d'océan avec 7 circuits.

On dit qu'un océan est un *tourbillon* s'il n'a qu'un circuit qui contient toutes les cases de l'océan.

8. Donner sur l’annexe un exemple de tourbillon de taille 2 x 4.

9. Est-il possible de faire un tourbillon de taille 3 x 5 ?

Annexe Un océan agité

Question 1a :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 1b :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 3 :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 4 :

→	→	→	↓	←
→	↓	←	←	↑
↑	→	→	→	↑

Question 5 :

↓	↓	←	↓	←	←
→	↓	↑	←	↑	↓
↑	↓	→	→	↑	↓
↑	→	→	→	↑	←

Question 7c :

→	←	→	←	←
↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑

Question 8 :

→	→	→	↓
↑	←	←	←