Olympiades nationales de mathématiques 2020

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent les **deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

Les nombres heureux

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.
On définit ensuite la suite $\left(S_n(N)\right)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\left(S_n(N)\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$.

On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

```
N donné
L ← liste vide
Pour n allant de ……… à ……….,
    a ← quotient de la division euclidienne de N par 100.
    b ← quotient de la division euclidienne de (N – 100a) par 10.
    c ← ………………………………………………
    N ← a²+b²+c²
    Mettre N à la fin de la liste L
Afficher L
```

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

4. On appelle point fixe de S un entier N tel que $S(N) = N$.

Le but de cette question est de démontrer que 0 et 1 sont les seuls entiers inférieurs ou égaux à 99, points fixes de S.

Notons a le chiffre des dizaines de l'entier N et b son chiffre des unités.

On peut ainsi écrire : $N = 10a + b$, avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9.

a. Démontrer que $S(N) = N$ si et seulement si $(2a - 10)^2 + (2b - 1)^2 = 101$.

b. On admet qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $x^2 + y^2 = 101$. Justifier que l'on a nécessairement $|x| \leq 10$ et $|y| \leq 10$.

c. En déduire que $b \leq 5$.

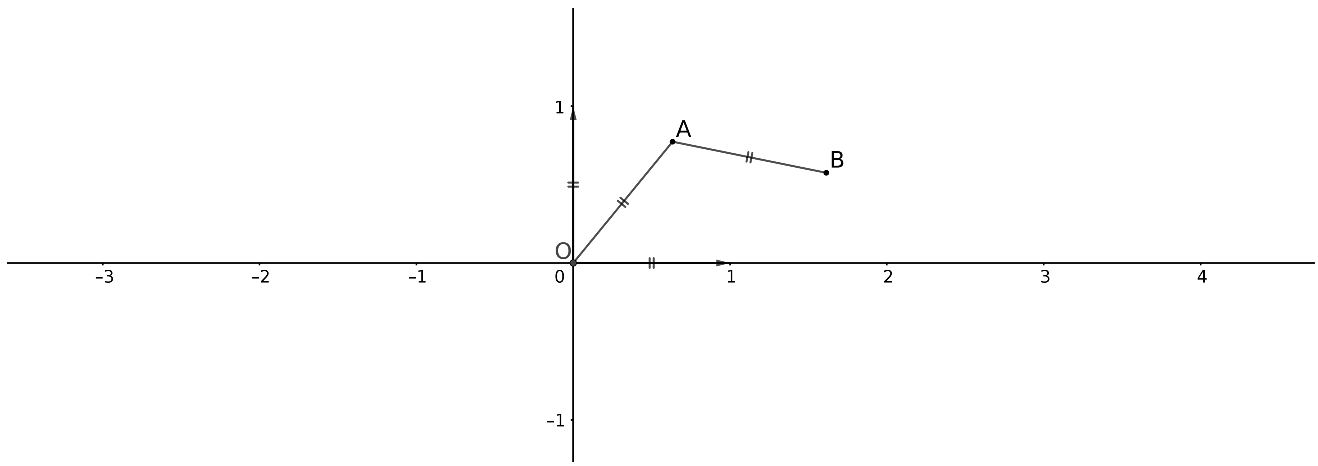
d. Conclure.

Exercice académique numéro 2

Des allumettes à la chaîne

On dispose d'une boîte d'allumettes mesurant toutes une unité de longueur. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et d'origine *O* de coordonnées *(0 ; 0)*. On trace une chaîne avec les allumettes en partant du point *O*. Chaque allumette commence là où la précédente termine... jusqu'à l'extrémité libre de la dernière allumette, que l'on appelle l'arrivée du chemin.

Dans l'exemple ci-dessous, on a deux allumettes, *[OA]* et *[AB]*, et le point *B* est l'arrivée.
Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan, quitte à utiliser suffisamment d'allumettes.



Dans un premier temps, on cherche à montrer que l'on peut atteindre tout point de l'axe des abscisses.

1. Tracer, sur l'annexe, un chemin qui permette d'atteindre le point de coordonnées (2 ; 0).

2. En déduire une méthode pour atteindre les points de coordonnées $(n; 0)$ avec n entier naturel.

3. Soit x un réel. Supposons atteint le point de coordonnées $(x; 0)$.

   a. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x + 1; 0)$.

   b. Expliquer de même comment atteindre le point de coordonnées $(x - 1; 0)$.

4. Soit x un réel dans l'intervalle $[-2; 2]$. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x; 0)$ avec une chaîne de 2 allumettes. On pourra s'appuyer sur un schéma.

5. En déduire que l'on peut atteindre tous les points de l'axe des abscisses.

6. Expliquer comment atteindre chaque point du plan.

7. On s'intéresse maintenant au nombre minimal d'allumettes nécessaires pour atteindre un point donné.

   a. Tracer, sur l'annexe, un chemin de longueur minimale, pour atteindre le point de coordonnées $(3; 3)$.

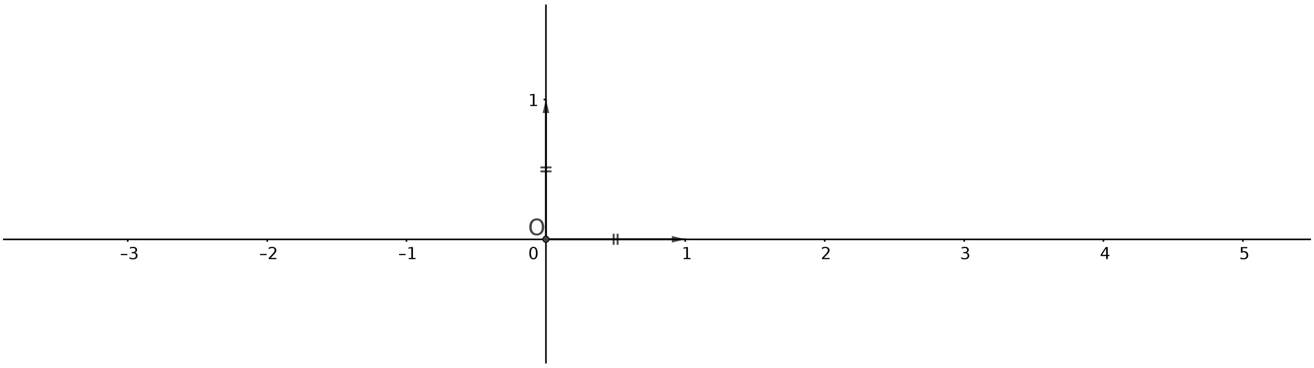
   b. Même question pour le point de coordonnées $(4; 3)$.

   c. Soit x un réel. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x; 0)$ en fonction de x.

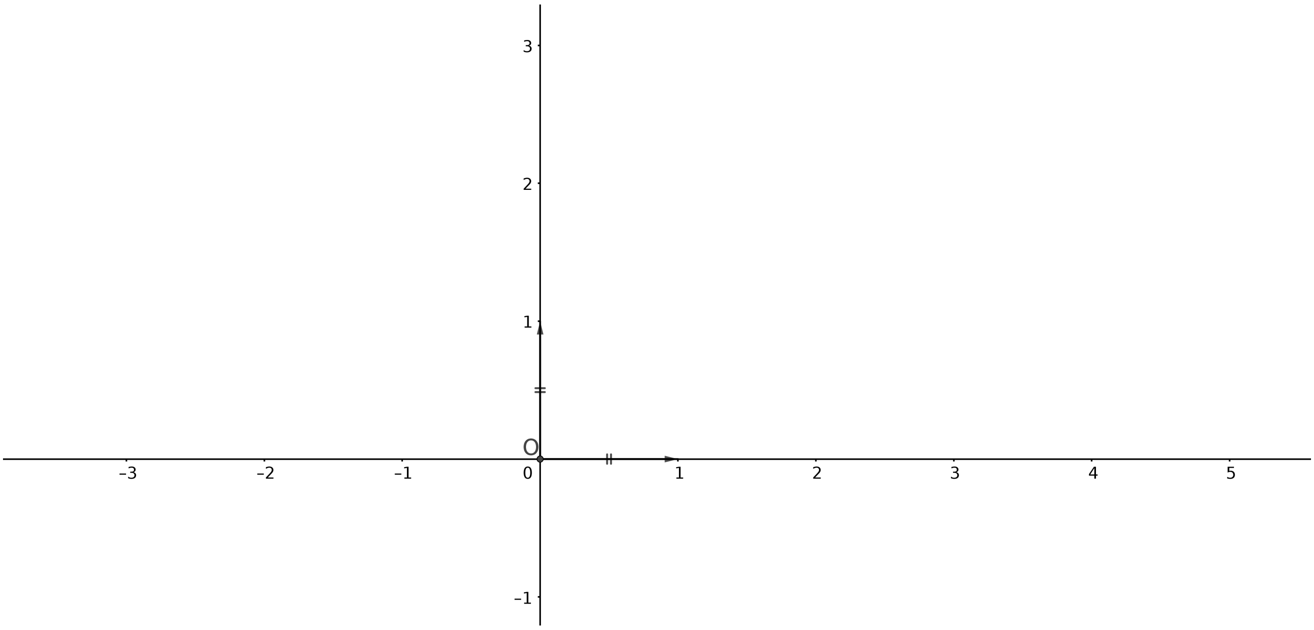
   d. Soient x et y deux réels. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x; y)$ en fonction de x et y.

Annexe de l’exercice académique numéro 2.

Question 1



Question 7 a.



Question 7 b.