Olympiades nationales de mathématiques 2020 Voie technologique

Académie de Nice

L’épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l’issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l’épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d’exposer le bilan des initiatives qu’ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

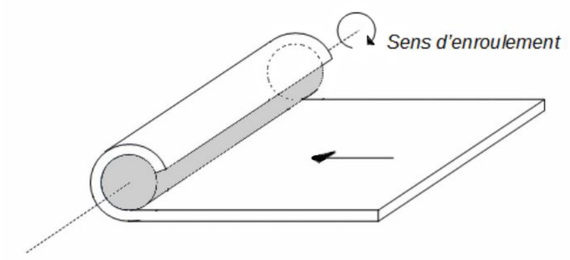
Les candidats traitent les **deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

Ça tourne rond

On dispose d'un rouleau circulaire sur lequel on souhaite enrouler une certaine longueur de revêtement isolant formant ainsi plusieurs couches successives.

Fig 1. Vue de profil



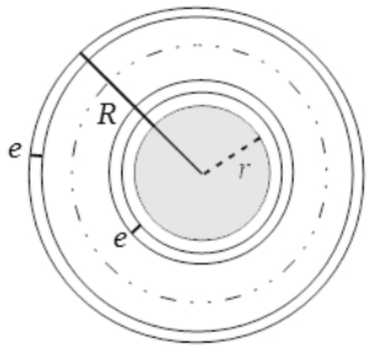
Lors de cet enroulement, on considère que les couches successives sont enroulées de façon parfaitement circulaire et que les tours réalisés sont complets.

Dans tout l'exercice, l'épaisseur du revêtement isolant est notée e, le rayon du rouleau circulaire est noté r et la longueur totale du revêtement isolant enroulé est notée L.

L'épaisseur totale, revêtement isolant et rouleau compris, est notée R.

Les surfaces considérées dans les questions de l'exercice ne concernent que la vue de côté ci-dessous, c'est-à-dire, le disque de rayon r, le disque de rayon R ou la couronne constituée du revêtement.

Fig 2. Vue de côté



Partie A : étude théorique

1. Exprimer en fonction de R et r, l'aire de la couronne située entre le rouleau et la couche supérieure de revêtement isolant.

2. Justifier que l'on a l'égalité entre surfaces : $L \times e = \pi(R^2 - r^2)$.

On note n le nombre de tours complets réalisés.

3. Justifier que $R - r = n \times e$ et que $R + r = 2\,r + n \times e$.

4. En déduire les relations suivantes : $L = \pi\, n\, (R + r)$ et $L = \pi\, n\, (2\,r + n \times e)$.

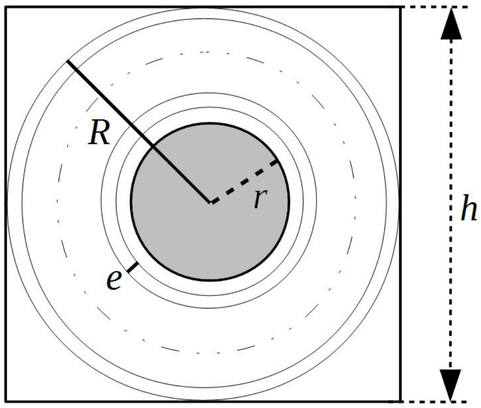
Partie B : applications numériques

Toutes les applications numériques se feront en prenant $r = 250\text{mm}$ et $e = 5\text{mm}$ Dans cette partie, on pourra utiliser les formules énoncées dans la partie A .

1. On compte autour du rouleau 50 tours complets de revêtement isolant.
Déterminer en mètre, la longueur totale de revêtement enroulé. *Arrondir au mm .*

2. Le rouleau complet après enroulement du revêtement isolant doit pouvoir rentrer dans une boîte dont l'une des faces est un carré de côté $h = 150$ cm.

a. Déterminer le nombre de couches de revêtement.
b. Calculer la longueur totale de revêtement enroulé en mètres, arrondie au mm.



3. On dispose d'une longueur de revêtement isolant de $400\ m$.

a. Déterminer le nombre maximal de tours complets possibles.
b. Calculer la longueur de revêtement isolant qui ne sera pas enroulé en mètres, arrondie au mm.

Exercice académique numéro 2

Les nombres heureux

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.
On définit ensuite la suite $(S_n(N))$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S(S_n(N)) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$.

On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

```
N donné
L ← liste vide
Pour n allant de ……… à ……….,
    a ← quotient de la division euclidienne de N par 100.
    b ← quotient de la division euclidienne de (N – 100a) par 10.
    c ← ……………………………………………….
    N ← a²+b²+c²
    Mettre N à la fin de la liste L
Afficher L
```

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.