RÉGION ACADÉMIQUE PROVENCE-ALPES-CÔTE D'AZUR

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2020
Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

Nombres similaires

On dit que deux nombres entiers non nuls sont similaires si on peut réorganiser les chiffres de l'un pour obtenir l'autre. On ne peut pas mettre de zéro en première position : *01* est le nombre *1*. Par exemple, les nombres *17* et *71* sont similaires, les nombres *584*, *485* et *548* sont similaires, et *10* et *1* ne sont pas similaires. Deux nombres similaires ont donc le même nombre de chiffres.

Soit n un entier naturel non nul. On range les nombres entre *1* et n dans des boîtes, en regroupant les nombres similaires dans une même boîte. On cherche à savoir combien de boîtes sont nécessaires pour faire cela. On note ce nombre de boîtes $f(n)$.

Partie 1

1. Pour tout n compris entre *1* et *9*, déterminer $f(n)$.

2. Donner l'exemple d'une boîte contenant exactement deux nombres similaires.

3. On cherche à calculer *f(99)*. Dans cette question, on considère les nombres entiers à deux chiffres.

a. Si un nombre entier à deux chiffres comporte un zéro, peut-il être similaire à un autre nombre ? Combien de nombres à deux chiffres possèdent un zéro ?

b. Les nombres s'écrivant avec 2 chiffres identiques non nuls sont-ils similaires à d'autres nombres ?

c. Si un nombre s'écrit avec deux chiffres différents non nuls, à combien d'autres nombres est-il similaire ? Combien de boîtes sont-elles nécessaires pour ranger tous les nombres avec deux chiffres différents non nuls ?

4. En déduire que *f(99)=63*.

Partie 2

On pourra réutiliser dans cette partie les résultats de la partie 1 sans démonstration.
Le but de cette partie est de calculer *f(999)*.
On admet que l'on peut regrouper les nombres entre *1* et *999* en *4* catégories :
A : Les nombres qui sont inférieurs ou égaux à 99.
B : Les nombres qui ont trois chiffres et dont au moins un est un zéro.
C : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et au moins deux chiffres identiques.
D : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et dont les chiffres sont tous différents.

1. Expliquer pourquoi, si deux nombres appartiennent à des catégories différentes, ils ne peuvent pas être similaires.

2. Montrer qu'il faut 54 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie B.

3. Montrer qu'il faut 33 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie C.

4. Déterminer le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les nombres de la catégorie D.

5. En déduire la valeur de *f(999)*.

Exercice académique numéro 2

Le cavalier errant

On considère un tableau de nombres placés en diagonale dans des cases comme suit :

1	2	4	7	11	16	22	…	…
3	5	8	12	17	23	…		
6	9	13	18	24	…			
10	14	19	25	…				
15	20	26	…					
21	27	…						
28	…							
…								
…								

Un cavalier se déplace sur ces cases. Il peut se déplacer sur les huit cases de A à H comme suit (on a représenté le cavalier par ♞) :

	A		B	
C				D
		♞		
E				F
	G		H	

Schéma des 8 positions

Le cavalier débute sur la case contenant le nombre 1. Parmi les cases qu'il peut atteindre, il va sur celle qui a le plus petit nombre, et qu'il n'a pas encore visitée. Par exemple, pour son premier mouvement, il peut atteindre les cases contenant les nombres 8 et 9, il va donc sur la case contenant 8. Son deuxième mouvement l'amène sur la case contenant le nombre 6.

Si toutes les cases qu'il peut atteindre ont déjà été visitées, il est bloqué.

1. Donner dans l'ordre les nombres des dix premières cases visitées par le cavalier. Aucune justification n'est demandée.

On nomme, comme dans le *Schéma des 8 positions* ci-dessus, les cases A à H qui sont accessibles pour le cavalier.

2. **a.** Des cases A et C, laquelle contient le plus petit nombre ? Justifier.

b. Même question pour les cases A et B. Justifier.

c. Plus généralement, classer les cases de A à H par ordre croissant du nombre qu'elle contient. La justification n'est pas attendue.

On repère les cases du tableau grâce au couple $(\ell; c)$, ℓ étant le numéro de la ligne et c celui de la colonne. La case en haut à gauche est la case (1;1).

					colonne c ▼		
	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	..
	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	…	..
	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	…	…	..
	(4;1)	(4;2)	(4;3)	…	…	…	..
	(5;1)	(5;2)	…	…	…	…	..
ligne l ►	…	…	…	…	(l;c)	…	..
	…	…	…	…	…	…	..

3. On suppose dans cette question qu'aucune des 8 positions, que le cavalier peut atteindre, n'a été atteinte auparavant.

a. Si on note $(\ell; c)$ la case sur laquelle le cavalier se trouve, par quels couples, en fonction de ℓ et de c, note-t-on les cases A à H du *Schéma des 8 positions*?

b. À partir de quel numéro de ligne et quel numéro de colonne, le cavalier doit-il se trouver pour qu'aucune des huit positions ne sorte du tableau ?

c. Si le cavalier se trouve sur la première ligne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des colonnes 1, 2 et suivantes.

d. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième ligne.

e. Si le cavalier se trouve sur la première colonne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des lignes 1, 2 et suivantes.

f. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième colonne.

4. On se propose d'écrire un algorithme permettant de construire la liste des nombres successivement rencontrés lors du parcours du cavalier. Pour cela on dispose d'une boucle et de cinq procédures :

P1 : Élimination des nombres déjà visités d'une liste donnée.

P2 : Positionnement sur la case choisie par la procédure précédente.

P3 : Recherche du minimum d'une liste non vide de nombres, et arrêt si liste vide.

P4 : Positionnement sur la case contenant le nombre 1.

P5 : Liste des nombres contenus dans les cases accessibles.

Donner, dans l'ordre de leur exécution, les procédures permettant de construire le parcours du cavalier en entourant par un couple de parenthèses le groupe des procédures qui s'effectueront en boucle.

5. Pour n entier naturel, on note $T(n)$ le n-ième nombre triangulaire. On admet que $T(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

On admet que le nombre u situé à la ligne numéro $\boldsymbol{\ell}$ et la colonne numéro $\boldsymbol{c}$ est donné par la formule :

$$u = \boldsymbol{\ell} + T(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\ell} - 2).$$

a. Vérifier que la formule donne bien le nombre 1 contenu dans la case (1 ; 1).

b. On suppose dans cette question que $\boldsymbol{c} \geq 2$. On se place dans la case contenant le nombre u à la ligne numéro $\boldsymbol{\ell}$ et à la colonne numéro $\boldsymbol{c}$. On se déplace d'une seule case vers le bas puis d'une seule case vers la gauche.

c. Vérifier à l'aide de la formule que le nombre contenu dans la case d'arrivée est le nombre $u + 1$.

d. On suppose dans cette question que $\boldsymbol{c} = 1$. À l'aide de la formule, donner en fonction de u le numéro de la colonne où se trouve le nombre $u + 1$, situé alors sur la ligne 1.

e. En exécutant l'algorithme de la question 4, le cavalier se trouve bloqué à la ligne 52 et la colonne 1. Sur quel nombre s'arrête-t-il ? Justifier.