

# Olympiades nationales de mathématiques 2020 Voie technologique

---

## Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

## Exercices académiques

### Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.



TEXAS INSTRUMENTS



NUMWORKS



## Exercice académique numéro 1

### À qui la crêpe ?

Ce soir, tous mes amis se sont réunis pour une soirée crêpes. Chacun se sert et mange à sa faim, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule crêpe.

**1. a.** Supposons que 4 personnes aient encore faim : Armand, Bilel, Chloé et Daphné. Ils tirent au sort pour déterminer la personne qui mangera la crêpe restante.

Mais ils n'ont qu'une pièce de monnaie équilibrée à deux faces.

Chloé propose la répartition suivante : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile puis Pile	Pile puis Face	Face puis Pile	Face puis Face
... mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé	Daphné

Calculer la probabilité qu'Armand mange la crêpe, la probabilité que Bilel mange la crêpe, la probabilité que Chloé mange la crêpe et la probabilité que Daphné mange la crêpe.

Le tirage au sort est-il équitable ou avantage-t-il quelqu'un en particulier ?

**b.** En fait Daphné n'a pas très faim. 3 volontaires restent donc pour la dernière crêpe.

Bilel propose une nouvelle répartition : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile la première fois	Face puis Pile	Face puis Face
... mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé

Montrer que ce nouveau tirage au sort n'est pas équitable entre les 3 intéressés.

Pour faire des tirages au sort équitables quel que soit le nombre de personnes intéressées par la dernière crêpe, Armand propose d'utiliser un dé à trois faces parfaitement équilibré. On note 1,2,3 les faces respectives du dé à trois faces.

**2. a.** Imaginons que 9 personnes veuillent la dernière crêpe. En lançant deux fois le dé à trois faces, proposer une méthode de tirage au sort équitable entre ces 9 personnes.

**b.** Même question si 27 personnes veulent la dernière crêpe.

**c.** Généralisons : que faire si  $3^n$  personnes veulent la dernière crêpe ?

**3.a.** Imaginons que 6 personnes convoitent la dernière crêpe. En lançant une fois la pièce et une fois le dé à trois faces, proposer un tirage au sort équitable entre ces 6 personnes.

**b.** Que faire si 72 personnes désirent manger la dernière crêpe ?

**c.** Soit  $n$  un nombre entier naturel dont les seuls facteurs premiers sont 2 et 3.

Par exemple,  $n = 72 = 2^3 \times 3^2$ .

Expliquer comment faire un tirage au sort équitable entre  $n$  amis avec la pièce et le dé à trois faces.

En pratique, tout le monde ne possède pas de dé à trois faces.

Revenons à une situation plus réaliste : Armand range son dé à trois faces et nous propose d'utiliser à la place un dé équilibré à six faces.

**4. a.** Comment réaliser un tirage au sort équitable entre 3 personnes avec ce dé à six faces ?

**b.** Si on utilise seulement ce dé à six faces, peut-on faire un tirage au sort équitable entre 2 personnes ?

**c.** Expliquer pourquoi le résultat de la question 3.c) reste vrai lorsque l'on n'a plus de pièce ni de dé à trois faces, mais seulement un dé à six faces.

**d.** Armand sort maintenant un autre dé en plus du dé à six faces : un dé équilibré à vingt faces.

Il affirme qu'avec ces deux dés, il sait faire un tirage au sort équilibré pour  $n$  amis quel que soit le nombre entier  $n$  tant que ses facteurs premiers ne sont que des 2, des 3 ou des 5. Quelle est sa méthode ?

## Exercice académique numéro 2

### Un océan agité

Un océan est un rectangle de taille 3 x 5 composé de cases. Chaque case a un courant, c'est-à-dire une flèche vers une case voisine.

Les courants pointent toujours vers une autre case de l'océan.

Voici un exemple d'océan :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Un bateau se déplace sur l'océan. Quand il est sur une case, il se déplace sur la case voisine indiquée par le courant. Par exemple, si le bateau est sur la case en haut à gauche de l'océan ci-dessus, il se déplace d'une case vers la droite.

1. **a.** Le bateau commence sur la case en haut à gauche. Sur l'océan de l'annexe, tracer en bleu la trajectoire du bateau. Que remarque-t-on ?
- b.** Le bateau commence sur la case au centre de l'océan. Sur l'océan de l'annexe, tracer en rouge la trajectoire du bateau.

Un *circuit* est un ensemble  $E$  de cases qui vérifie les propriétés suivantes :

- si le bateau commence sur une case de  $E$ , il ne sort pas de  $E$  ;
- le bateau visite toutes les cases de  $E$  ;
- le bateau repasse par sa case de départ.

Par exemple, la trajectoire bleue (de la question 1. a.) est un circuit.

2. Expliquer pourquoi la trajectoire rouge (de la question 1. b.) n'est pas un circuit.
3. Sur l'océan de l'annexe, colorier dans des couleurs différentes tous les circuits.
4. Compléter l'océan de l'annexe de façon à ce qu'il contienne un seul circuit et que ce circuit soit constitué de plus de quatre cases. Colorier ce circuit.
5. Compléter l'océan pour qu'il contienne un circuit passant par toutes les cases grisées et le colorier.

On cherche maintenant à prouver que tous les océans 3 x 5 ont au moins un circuit. On considère donc un océan de taille 3 x 5 sur lequel se déplace un bateau partant d'une case quelconque.

Dans les questions suivantes, on tiendra compte de la qualité de la rédaction.

6. **a.** Montrer que le bateau, après 16 mouvements, est repassé au moins deux fois par la même case.
- b.** En déduire qu'il existe au moins un circuit.

On s'intéresse maintenant au nombre maximum de circuits dans l'océan.

7. **a.** Montrer que deux circuits ne peuvent pas se croiser.
- b.** Montrer que, sur un océan de taille 3 x 5, il y a au plus 7 circuits.
- c.** Donner sur l'annexe un exemple d'océan avec 7 circuits.

On dit qu'un océan est un *tourbillon* s'il n'a qu'un circuit qui contient toutes les cases de l'océan.

8. Donner sur l'annexe un exemple de tourbillon de taille 2 x 4.
9. Est-il possible de réaliser un tourbillon de taille 3 x 5 ?

## Annexe Un océan agité

Question 1a :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 1b :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 3 :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 4 :

→	→	→	↓	
	↓		←	↑
↑	→	→	→	↑

Question 5 :

↓	↓	←			←	
→			↑	←	↑	↓
↑	↓	→	→		↓	
↑		→	→	↑	←	

Question 7c :


Question 8 :
