Énigmes mathématiques pour confinés : volume 2

Sylvain ETIENNE
Professeur de Mathématiques
Collège Sidney BECHET
Antibes (Alpes-Maritimes)

Résumé

Cet article présente des activités de réflexion de niveau collège, sous forme d'énigmes mathématiques, à faire en famille durant la période de confinement.

Table des matières

Énigmes mathématiques pour confinés : volume 2 ... 1
Résumé ... 1
Niveau 6e : ... 2
Activité N°1 : nombre mystère ... 2
Activité N°2 : nombre mystère bis ... 2
Activité N°3 : le compte est bon ... 3
Activité N°4 : programme de construction : l'étoile de Pompéi ... 4
Niveau 5e : ... 5
Activité N°1 : *Ohayo* ... 5
Activité N°2 : labyrinthe ... 5
Niveau 4e : ... 7
Activité N°1 : carré magique ... 7
Activité N°2 : personnage préféré ... 7
Niveau 3e : ... 9
Activité N°1 : carrés ... 9
Activité N°2 : Jeu de Juniper-Green ... 9
Activité N°3 : le jeu du huit ... 11

Niveau 6e :

Activité N°1 : nombre mystère

- J'ai marqué sur ma copie un nombre à trois chiffres dont le dernier n'est pas un zéro.
- J'ai rayé le premier chiffre (celui des centaines).
- J'ai multiplié le nombre à deux chiffres restant par 9.

Surprise : j'ai retrouvé mon nombre de départ !
Quel était ce nombre ?

Correction :
En 6e, il faut tester pour trouver de tels nombres. On peut faire le produit d'un nombre à deux chiffres par 9 afin de voir les différents résultats, et on associe ensuite la centaine, c'est plus facile. En faisant des tests, on peut s'apercevoir que le seul chiffre possible pour le chiffre des unités est 5 car c'est le seul qui reste stable par la multiplication par 9.
On trouve alors deux possibilités : 225 et 675.

A un niveau plus avancé (à partir de la 3e), on peut faire un raisonnement à base de calcul littéral pour s'assurer de tous les trouver.

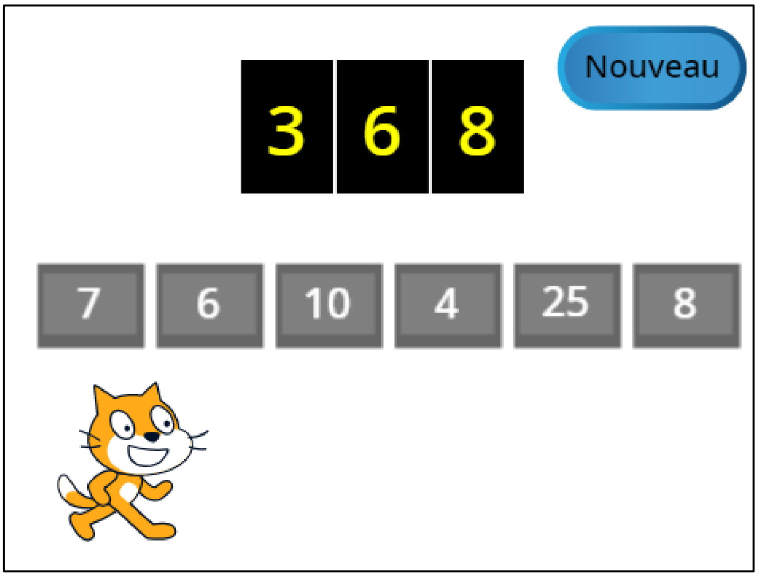
Activité N°2 : nombre mystère bis

Le père de Tiffany lui dit :
« J'ai pensé à un nombre entier.

- C'est un multiple de 6.
- Si tu le doubles, tu obtiens un nombre plus petit que 100.
- Si tu le triples, tu obtiens un nombre plus grand que 100.
- Si tu lui ajoutes 11 et si tu doubles le résultat, tu obtiens encore un nombre plus petit que 100.

Quel est le nombre auquel j'ai pensé ? »
Correction :
A l'aide du point 2, on sait que le nombre de départ est plus petit que 50.
A l'aide du point 3, on sait que le nombre de départ est plus grand que 33.
Donc le nombre de départ est entre 33 et 50.
A l'aide du point 1, les seuls nombres possibles sont donc les multiples de 6 entre 33 et 50, soit : 36 ; 42 ; 48.
Il faut à présent utiliser le dernier point et seul 36 correspond car $(36 + 11) \times 2 = 94$, tandis que $(42 + 11) \times 2 = 106$ (et 48 donnerait un nombre plus grand que 100 de même).

Activité N°3 : le compte est bon



Le nombre cible est 368, les nombres outils sont 7 ; 6 ; 10 ; 4 ; 25 et 8.
Chaque nombre-outil peut être utilisé une seule fois ou pas du tout.
A l'aide des nombres-outils et des quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division, il faut trouver le nombre cible.

Pour d'autres « compte est bon », on pourra aller sur :
Cible à deux chiffres : https://scratch.mit.edu/projects/335978526/
Cible à trois chiffres : https://scratch.mit.edu/projects/335978865/

Correction :
Il y a beaucoup de solutions du fait que 368 soit divisible par 8.
Par exemple :
$7 \times 6 = 42$
$42 + 4 = 46$
$46 \times 8 = 368$

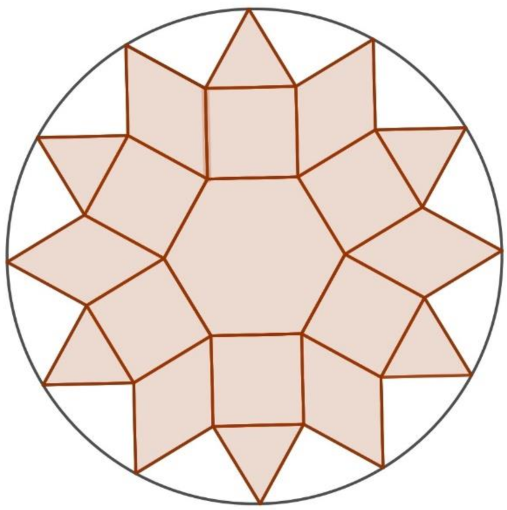
Si on veut utiliser chaque opération élémentaire au moins une fois, voici par exemple :
$8 \div 4 = 2$
$25 - 2 = 23$
$10 + 6 = 16$
$23 \times 16 = 368$

Activité N°4 : programme de construction : l'étoile de Pompéi

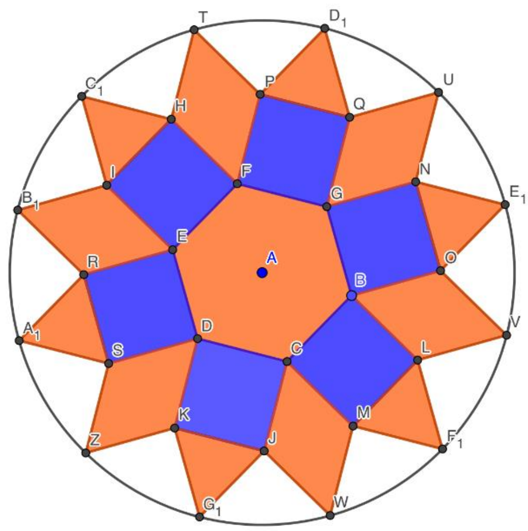
On pourra réaliser ce programme de construction sur feuille blanche, sur un logiciel de géométrie dynamique ou même sur un logiciel de programmation par blocs !

1. Placer un point O au centre de la feuille.
2. Tracer un cercle de rayon 3 cm et de centre O.
3. Tracer un hexagone (polygone à 6 côtés) dont les sommets seront sur ce cercle. (Indice : pour tracer un hexagone, il faut conserver le rayon du cercle et faire une rosace en prenant chaque centre sur le cercle de la consigne précédente)
4. Sur chaque côté de l'hexagone, tracer un carré vers l'extérieur.
5. Entre deux carrés consécutifs, tracer un losange.
6. Sur le dernier côté disponible de chaque carré, tracer un triangle équilatéral.
7. Tracer enfin un cercle de centre O qui doit passer par tous les sommets extérieurs des losanges et des triangles équilatéraux.

Correction :



ELLIOT



MALLORY

Niveau 5e :

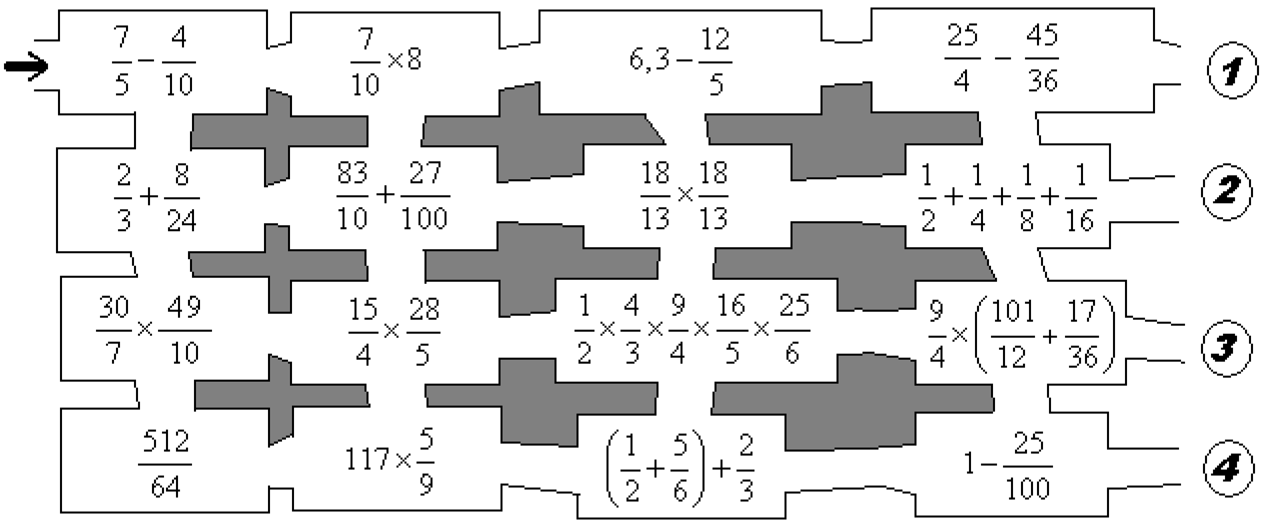
Activité N°1 : *Ohayo*

Lors d'une convention sur les mangas, chaque participant a dit « *ohayo* » (signifie « salut » en japonais) à chaque personne rencontrée. A son tour, celle-ci lui a répondu de la même façon. Tous les participants se sont salués et à peine plus de 700 « *ohayo* » ont été dits.
On cherche à savoir combien de personnes étaient présentes à la convention.

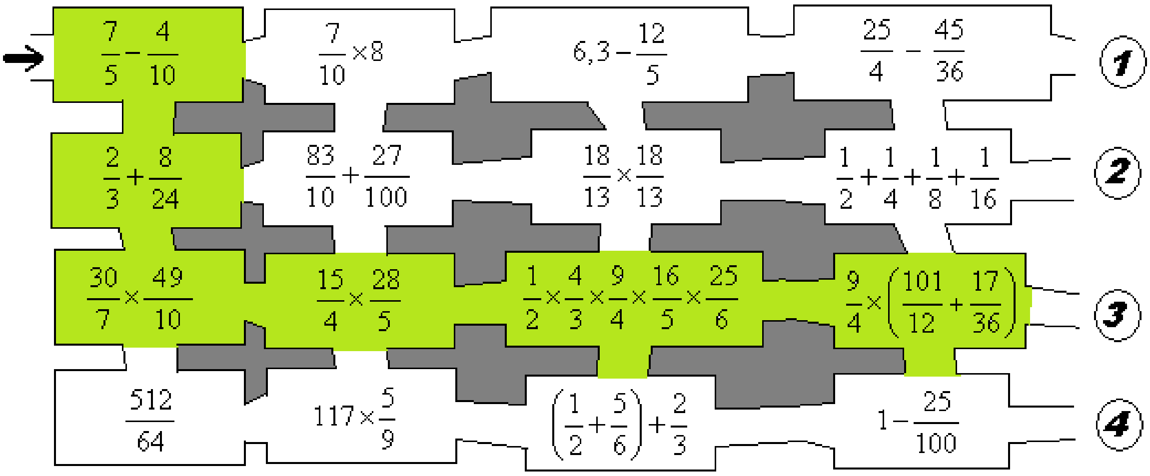
Correction :
La réponse « évidente » 350 n'est pas exacte.
On peut faire des tests sur les premières valeurs.
S'il y a une personne, aucun « ohayo » n'est prononcé.
S'il y a deux personnes, 2 « ohayo » sont prononcés, puisque chacune des deux personnes se dit « ohayo ».
S'il y a trois personnes, 6 « ohayo » sont prononcés, chaque personne doit saluer les deux autres, une de moins que le nombre total de personnes.
S'il y a quatre personnes, 12 « ohayo » sont prononcés, en poursuivant le schéma de la question précédente.
S'il y a cinq personnes, 20 « ohayo » sont prononcés, en poursuivant le schéma de la question précédente.
On pourrait poursuivre. Cependant, on peut s'apercevoir que chaque personne dit un « ohayo » de moins que le nombre de personnes (car il ne se salue pas lui-même). Par conséquent, on peut y voir une formule mathématique : si « n » désigne le nombre de personnes, alors il y a $n \times (n-1)$ « ohayo » prononcés.
L'utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice permet de trouver que $27 \times 26 = 702$. Ainsi, il y aurait 27 personnes à cette convention.

Activité N°2 : labyrinthe

Dans ce labyrinthe, on ne peut te déplacer que sur les cases dont le résultat est un nombre entier. Trouver le chemin qui te conduira au 20…



Correction :


$\frac{7}{5}-\frac{4}{10}$
$\frac{7}{10}\times 8$
$6,3-\frac{12}{5}$
$\frac{25}{4}-\frac{45}{36}$
1
$\frac{2}{3}+\frac{8}{24}$
$\frac{83}{10}+\frac{27}{100}$
$\frac{18}{13}\times\frac{18}{13}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
2
$\frac{30}{7}\times\frac{49}{10}$
$\frac{15}{4}\times\frac{28}{5}$
$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{9}{4}\times\frac{16}{5}\times\frac{25}{6}$
$\frac{9}{4}\times\left(\frac{101}{12}+\frac{17}{36}\right)$
3
$\frac{512}{64}$
$117\times\frac{5}{9}$
$\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)+\frac{2}{3}$
$1-\frac{25}{100}$
4

Niveau 4e :

Activité N°1 : carré magique

Un carré est dit **multiplicativement** magique lorsque le produit des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est le même.

Recopier et compléter le carré ci-contre afin qu'il devienne multiplicativement magique.

-18	1	
	-6	
		-2

Correction :

Sur la diagonale, on effectue le produit :
$18 \times (-6) \times (-2) = -216.$
Sur la première ligne, la case manquante est donc :
$-216 \div (-18 \times 1) = 12.$
Cela nous permet de trouver la troisième colonne par exemple : $-216 \div \left(12 \times (-2)\right) = 9.$
Et ainsi de suite.

-18	1	12
4	-6	9
3	36	-2

Activité N°2 : personnage préféré

1. Choisissez votre nombre entier favori entre 1 et 9.
2. Multipliez-le par -3.
3. Soustrayez 3 et multipliez le résultat obtenu par -3.
4. Vous obtiendrez un nombre de 2 chiffres.
5. Additionnez ces chiffres ensemble.

Avec le nombre obtenu, voyez qui est votre modèle selon la liste ci-dessous :

1 : Pablo Picasso	5 : Lady Gaga	9 : Mon professeur de mathématiques	13 : Obi-Wan Kenobi
2 : Zinedine Zidane	6 : Marie Curie	10 : Johnny Depp	14 : Chuck Norris
3 : Scarlett Johansson	7 : Tony Parker	11 : Rihanna	15 : Luffy
4 : Kristen Stewart	8 : Taylor Swift	12 : Albert Einstein	16 : J.C. Van Damme

Hum... Je sais... Normal... Arrêtez de chercher d'autres nombres de départ ! Je suis votre idole, faites-vous à cette idée !!!
Sauriez-vous expliquer ?

Correction :
Testons sur 4 :

1. 4
2. $4 \times (-3) = -12$
3. $(-12 - 3) \times (-3) = 45$

4. 45
5. $4 + 5 = 9$

Peu importe le nombre de départ, le résultat sera toujours 9 !
En effet, les nombres trouvés seront tous inférieurs à 100 et dans la table de 9, et le critère de divisibilité par 9 donne la réponse.

Pour prouver que les nombres sont dans la table de 9, il faut utiliser le calcul littéral :

1. x
2. $x \times (-3) = -3x$
3. $(-3x - 3) \times (-3) = 9x + 9 = 9 \times (x + 1)$
4. $9 \times (x + 1)$

Si x est un nombre entier entre 1 et 9, $x + 1$ sera, au plus égal à 10. Le produit de 9 par $(x + 1)$sera donc inférieur à 90. Les multiples de 9 inférieurs à 90 ont, tous, la somme des chiffres les composants égale à 9. C'est donc bien toujours moi leur idole !

Niveau 3e :

Activité N°1 : carrés

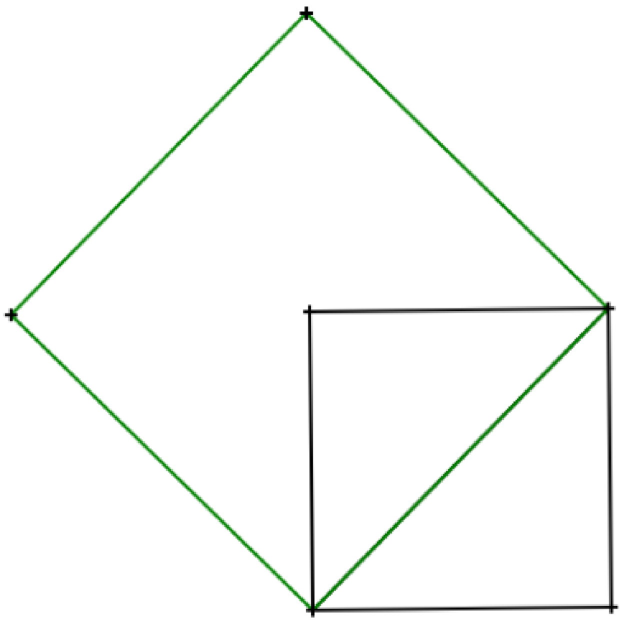
Construire deux carrés de telle sorte que l'aire du deuxième carré vaille le double de celle du premier.

Correction :

Avoir une aire double signifie que le côté du carré agrandi a été multiplié par $\sqrt{2}$. En effet, si « a » désigne la mesure du côté du carré initial, alors l'aire de celui-ci est a^2. On cherche à construire un carré d'aire $2a^2 = \left(\sqrt{2}\,a\right)^2$. La longueur du côté est alors $\sqrt{2}\,a$.

Pour avoir une telle longueur, on peut utiliser la diagonale du carré initiale. D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de longueur « a » est $\sqrt{2}\,a$.

Une construction possible est alors :



Le carré initial en noir et le carré agrandi en vert dont l'aire est double de celle du carré noir.

Activité N°2 : Jeu de Juniper-Green

Le jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green, auquel il doit son nom. Il a été popularisé grâce à Ian Stewart, célèbre mathématicien anglais, qui en décrit les règles dans la revue *Pour la Science*, n°237 de juillet 97.

Il y a plusieurs versions de ce jeu à deux joueurs. On utilisera les règles en version 40, c'est-à-dire que le nombre maximal est 40.

Peut-on trouver une stratégie gagnante pour la version 40 à 3 règles PVP ?

Version 40 à 3 règles PVP :

1. Le premier joueur choisi un nombre entier entre 1 et 40.
2. À tour de rôle, chaque joueur doit choisir un nombre entier entre 1 et 40 qui est un multiple ou un diviseur du nombre précédent.
3. Un nombre ne peut être utilisé qu'une seule fois.

Le perdant est le joueur ne trouvant pas de multiple ou de diviseur au nombre précédemment choisi.

La grille de jeu :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Correction :
Il faut tester plusieurs fois ce jeu pour se rendre compte de certains points :
Les nombres entre 1 et 10 ont beaucoup de multiples mais peu de diviseurs.
Les nombres au-delà de 20 n'ont pas de multiples (autre qu'eux-mêmes).
Pour certains nombres, on trouve plus facilement à jouer que d'autres, tandis qu'il est plus difficile pour d'autres.

Une stratégie gagnante repose sur l'utilisation des nombres premiers dont une liste initiale est : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41…
Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs : 1 et lui-même.
Il faut alors partir d'un nombre premier supérieur à 20 pour le premier joueur, soit 23 ; 29 ; 31 ou 37. En effet, dans ce cas, le deuxième joueur n'a d'autre choix que de prendre 1 puisque c'est le seul diviseur disponible. Le premier joueur n'a plus qu'à choisir alors un autre nombre premier supérieur à 20 pour gagner.

Activité N°3 : le jeu du huit

Le « jeu du huit » se joue à deux : chacun lance deux dés équilibrés en même temps et additionne les valeurs des deux dés. Si le résultat est un huit, le joueur marque 1 point. Le gagnant est le premier à atteindre 5 points.
Léo va voir Flo et lui propose une partie en modifiant légèrement les règles car ils n'ont que 3 dés :
« On joue avec trois dés, toi, Flo, tu additionnes les valeurs des deux dés que tu lances, tu as donc plein de possibilités d'obtenir huit, et moi, je ne lance qu'un dé et j'ajouterai 2 à la valeur, ainsi il me faudra obtenir un 6 pour avoir un point. »
Qu'en penser ?

Correction :
La situation semble déséquilibrée en faveur de Flo puisqu'elle a « plein de possibilités ». C'est sans compter le nombre de possibilités total !
On pourra faire quelques parties (on peut même jouer à distance) pour tester cette expérimentation. Et se rendre compte que ce n'est pas vraiment le cas…
La probabilité que Léo gagne un point est de sortir un 6 sur un dé. Il y a donc 1 chance sur 6 de gagner un point, soit $\frac{1}{6}$.
Pour Flo, avec deux dés, il faut voir l'ensemble des possibilités et celles qui permettent de gagner. On peut faire un tableau à double entrée pour mieux visualiser :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	**8**
3	4	5	6	7	**8**	9
4	5	6	7	**8**	9	10
5	6	7	**8**	9	10	11
6	7	**8**	9	10	11	12

Il y a donc 36 combinaisons différentes, et parmi elles, 5 sont des combinaisons gagnantes.
Flo a donc une probabilité de 5 chances sur 36 de gagner un point, soit $\frac{5}{36}$.
Or $\frac{1}{6} \approx 17\%$ et $\frac{5}{36} \approx 14\%$. Ainsi, Léo a plus de chance à chaque coup de gagner. La situation n'est pas équitable. Vous savez quoi choisir pour jouer contre un adversaire !