Groupe de Réflexion Académique Lycée (GRAL)

en Mathématiques

Mai 2020

JORRO Fabienne et Rémi

Professeurs de mathématiques

Lycée Albert Camus– Fréjus 83600 – Var

Nature : Bilans de connaissances et de compétences en lien avec les attendus de fin d'année (COVID)

Objectifs pédagogiques : Calculs de dérivées dans des cas simples.

Voie : générale

Niveau de classe : Spécialité mathématiques en 1ère

Thématique(s) du programme : Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Pré-requis : Fonctions dérivées des fonctions de référence.

Résumé de l'article :

Bilan sur la partie « Dérivation » du programme de première regroupant les différentes propriétés des opérations à savoir utiliser.

Deux présentations différentes au choix, plusieurs utilisations possibles (demander aux élèves de rédiger ou pas, donner les ensembles de dérivation ou pas…).

Dérivée d'une somme de fonctions dérivables : $(u+v)' = u' + v'$

Exemple 1 :
Dériver la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2x + e^x$.
f est de la forme $u + v$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = 2x$ *et* $v(x) = e^x$
$u'(x) = 2$ *et* $v'(x) = e^x$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x) = 2 + e^x$.

Exercice 1

Dériver les fonctions suivantes sur I :

1°) $f_1(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ et $I = \mathbb{R}^*$ 2°) $f_2(x) = 3x^2 + 5x - 1$ et $I = \mathbb{R}$ 3°) $f_3(x) = \sqrt{x} - e^x$ et $I =]0; +\infty[$

Dérivée d'un produit de deux fonctions dérivables : $(uv)' = u'v + uv'$
En particulier : pour k une constante réelle, $(ku)' = ku'$
$(u^2)' = 2uu'$

Exemple 2 :
Dériver la fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = xe^x$.
g est de la forme $u \times v$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = x$ *et* $v(x) = e^x$
$u'(x) = 1$ *et* $v'(x) = e^x$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = (u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$.

Exercice 2

Dériver les fonctions suivantes sur I :

1°) $g_1(x) = x\sqrt{x}$ et $I =]0; +\infty[$ 2°) $g_2(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$ et $I =]0; +\infty[$ 3°) $g_3(x) = (2x-1)e^x$ et $I = \mathbb{R}$

Dérivée d'un quotient d'une fonction dérivable par une fonction dérivable qui ne s'annule pas : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
En particulier : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Exemple 3 :
Dériver la fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$, par $h(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$.
h est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$: $u(x) = 2x + 1$ *et* $v(x) = 3x - 5$
$u'(x) = 2$ *et* $v'(x) = 3$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$: $h'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2(3x-5) - 3(2x+1)}{(3x-5)^2} = \frac{-13}{(3x-5)^2}$

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes sur I :

1°) $h_1(x) = \frac{7x-1}{x+1}$ et $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 2°) $h_2(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0; +\infty[$ 3°) $h_3(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{e^x}$ et $I = \mathbb{R}$

Pour g fonction dérivable, dérivée de la composée de la forme $f(x) = g(ax+b)$, a et b réels :
$$f'(x) = a\, g'(ax+b)$$

Exemple 4 :
Dériver la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (2x-1)^3$.
f est de la forme $f(x) = g(ax+b)$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = x^3$, $a = 2$ *et* $b = -1$
$g'(x) = 3x^2$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2 \times g'(2x-1) = 2 \times 3(2x-1)^2 = 6(2x-1)^2$

Exercice 4

Dériver les fonctions suivantes sur I :

1°) $f_1(x) = e^{3x-1}$ et $I = \mathbb{R}$ 2°) $f_2(x) = \sqrt{1-x}$ et $I =]-\infty; 1[$ 3°) $f_3(x) = e^{-2x}$ et $I = \mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

Expression de la fonction	Ensemble de dérivation	Fonction de la forme	Fonction dérivée de la forme	Expression de la fonction dérivée
$\boldsymbol{f(x) = 2x + e^x}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{u + v}$	$\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$	$\boldsymbol{f'(x) = 2 + e^x}$
$f_1(x) = x^2 + \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$			
$f_2(x) = 3x^2 + 5x - 1$	$\mathbb{R}$			
$f_3(x) = \sqrt{x} - e^x$	$]0; +\infty[$			
$\boldsymbol{g(x) = xe^x}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{uv}$	$\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$	$\boldsymbol{g'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)}$
$g_1(x) = x\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$			
$g_2(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$			
$g_3(x) = (2x - 1)e^x$	$\mathbb{R}$			
$g_{4(x)} = (2x^2 - 3)^2$	$\mathbb{R}$	u^2	$(u^2)' = 2uu'$	
$\boldsymbol{h(x) = \frac{2x+1}{3x-5}}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$	$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$	$\boldsymbol{h'(x) = \frac{2(3x-5) - 3(2x+1)}{(3x-5)^2}}$ $\boldsymbol{h'(x) = \frac{-13}{(3x-5)^2}}$
$h_1(x) = \frac{7x-1}{x+1}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$			
$h_2(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$			
$h_3(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{e^x}$	$\mathbb{R}$			
$h_{4(x)} = \frac{1}{5x^2+3}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$	

Expression de la fonction	$f(x) = (2x-1)^3$	$f_1(x) = e^{3x-1}$	$f_2(x) = \sqrt{1-x}$	$f_3(x) = e^{-2x}$
Ensemble de dérivation	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty; 1[$	$\mathbb{R}$
Fonction de la forme	$f(x) = g(ax+b)$			
Détails	$g(x) = x^3$ $a = 2 \,;\, b = -1$			
Fonction dérivée de la forme	$f'(x) = a\, g'(ax+b)$			
Expression de la fonction dérivée	$f'(x) = 2 \times g'(2x-1)$ $f'(x) = 2 \times 3(2x-1)^2$ $f'(x) = 6(2x-1)^2$			