Contraintes, algorithmes et preuves

Laurent Monasse*

* **Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, LJAD, Nice**

11 juin 2020

Laboratoire
J-A Dieudonné
Mathématiques
et Interactions

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Introduction

- Mathématiques : méthode de déduction logique dans un système d'axiomes
- L'histoire des mathématiques montre plutôt une construction par essai/erreur.
- Différentes cultures (grecque, islamique, chinoise, indienne) ont développé des approches différentes des mathématiques : résolution de problèmes concrets (de type algorithmique) ou discipline spéculative
- Comment les contraintes (sociales, philosophiques, politiques) externes aux mathématiques ont-elles façonné les mathématiques dans leur contexte ?
- Comment cela s'est-il traduit dans la recevabilité d'une preuve, dans un système donné ?
- Trois exemples :
  - Les trois grands problèmes de l'Antiquité
  - Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces
  - Naissance et formalisation de l'analyse

Outline

1 Les trois grands problèmes de l'Antiquité

2 Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces

3 Naissance et formalisation de l'analyse

Origine des mathématiques grecques

- Rencontre entre deux grandes traditions antiques : mathématiques mésopotamiennes et égyptiennes
- Différents formalismes, fragmentation politique : besoin d'un langage commun
- Cité-État grecque : discours pour convaincre l'adversaire
- Naissance des mathématiques et de la philosophie

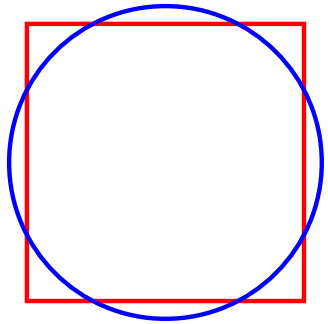
Thalès de Milet (-625 – -547), Pythagore (-580 – -495)

Les Pythagoriciens

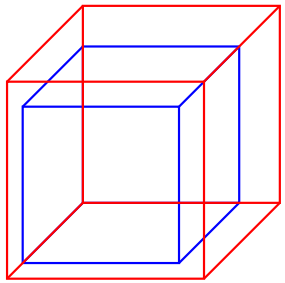
- Pythagore est le premier "philosophe" φιλόσοφος
- Ses disciples sont "mathematikoi", de μάθηματα "ce qui s'enseigne" (pour ceux qui ont atteint le dernier degré de l'enseignement)
- "Secte" fondée sur une mystique des nombres
- Femmes et étrangers admis
- Rapports rationnels valorisés par analogie avec la musique
- Crise causée par la découverte des irrationnels (attribuée à Hippase de Métaponte)

Les trois grands problèmes de l'Antiquité

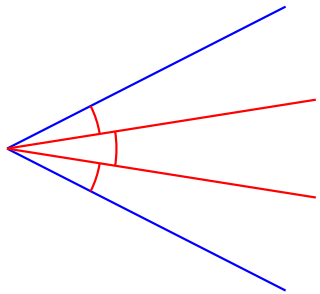
- Quadrature du cercle : problème ancien (Égyptiens, Babyloniens)



- Duplication du cube : peste de Délos et oracle de Delphe



- Trisection de l'angle : permet de construire des polygônes réguliers

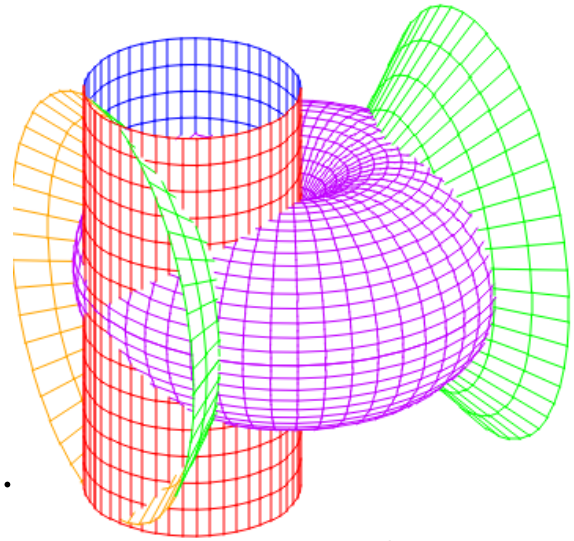


Solutions trouvées

Pour la duplication du cube :

- Ménechme, intersection de deux paraboles (ou d'une parabole et d'une hyperbole), invente les coniques pour ce problème

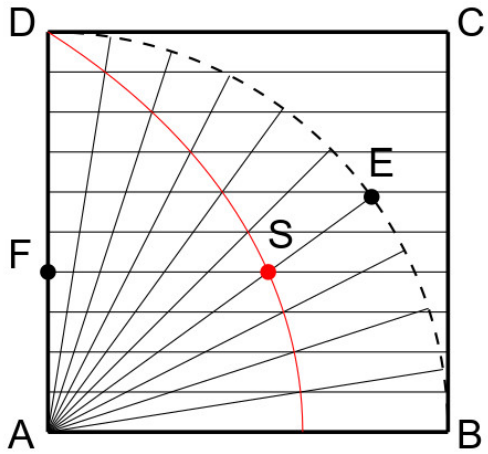
$$\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{a}{2}x \\ xy = a^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^3 = 2a^3.$$



- Archytas de Tarente : intersection tore, cylindre et cône

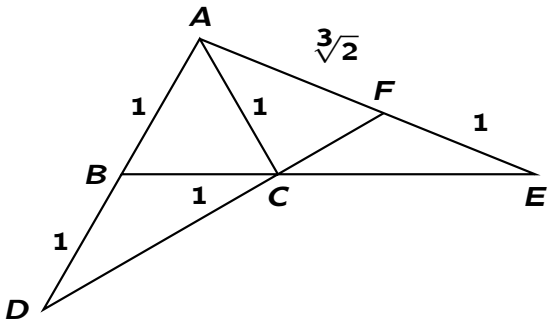
Pour la quadrature du cercle et la trisection de l'angle :

- Quadratrice d'Hippias d'Élis (empruntée par Dinostrate)



Validité des solutions

- Solutions rejetées par Platon (rapporté par Plutarque) : solutions "mécaniques" (ce sera d'ailleurs le titre d'un ouvrage d'Archimède)
- Comble de l'horreur : Hippias d'Élis est sophiste !
- Seule construction valable (contrainte) : à la règle (non graduée !) et au compas
- Les coniques sont tolérées car construites à partir du cône
- Exigence d'exactitude, à l'opposé d'un tâtonnement (*neusis*, de νεύειν "pencher vers")



- Problème identique à celui de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Postérité des trois grands problèmes

- *Éléments* d'Euclide ($\approx$ -300)
- Coniques développées par Appolonius de Perga (III^{e} siècle avant J.C.)
- Les mathématiques grecques avaient un versant "appliqué" (on le verra avec Archimède), qui reposait sur une numération par lettres : permet de faire des calculs imposants, mais difficile à mettre en oeuvre. Perdu au Moyen-Âge.
- En revanche, géométrie et coniques conservées dans le *quadrivium* : entraînement au raisonnement exact en vue de la théologie
- Permettra l'explosion des mathématiques occidentales au XVI^{e} siècle grâce à la numération arabe (indienne !) de position

Preuve de l'impossibilité d'une solution

- Pas de progrès significatif sur la résolution des trois problèmes : D'Alembert (1760, *Encyclopédie*) estime que c'est impossible et le lie avec le fait que ce sont des problèmes algébriques cubiques.
- 1753 : l'Académie des Sciences de Paris annonce refuser d'examiner les manuscrits proposant une preuve de la quadrature du cercle.
- 1837 : Pierre-Laurent Wantzel (1814–1848) résout le doublement du cube et la trisection de l'angle (article de 7 pages dans le *Journal de Liouville*).
  Idée de la preuve : Si on part de points à coordonnées rationnelles, on ne peut construire à la règle et au compas que des points à coordonnées dans des extensions de corps de degré pair (dont le polynôme annulateur minimal dans $\mathbb{Q}$ est de degré pair).
- La quadrature du cercle est résolue par la démonstration de la transcendance de π par Ferdinand von Linnemann (1852–1939).
- Problème lié à la construction des polygônes à n côtés à la règle et au compas, résolu par Gauss (1796) pour n un nombre premier de Fermat (n=3, 5, 17, 257, 65537).

Outline

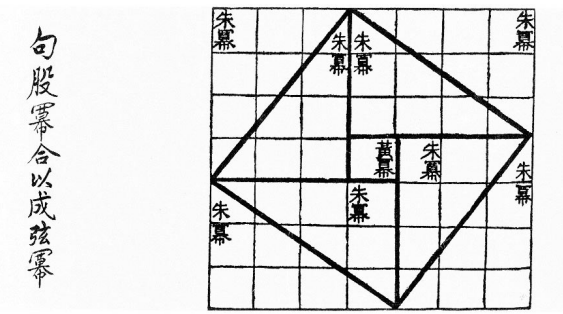
1 Les trois grands problèmes de l'Antiquité

2 Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces

3 Naissance et formalisation de l'analyse

Origine des mathématiques chinoises

- Les mathématiques font partie des Six Arts de la tradition confucéenne.
- Origines obscures : fénshū kēngrú 焚书坑儒 sous la dynastie Qin (-213)
- Importance de l'astronomie



- Premiers écrits proprement mathématiques sous la dynastie Han (-206–220) :
  - Zhōubì Suànjīng 周髀算经 (*Classique mathématique du gnomon des Zhou*)
    Entre les dynasties Zhou (-1046– -256) et Han (-202 – 220). 246 problèmes liés à l'astronomie. Problèmes de cercles inscrits ou circonscrits à un carré : théorème de Gougu 勾股定理 = théorème de Pythagore
  - Suàn shù shū 算数书 (*Livres sur le nombre et le calcul*)
    Découvert en 1984 dans une tombe (fermée en -186) sur 190 bandes de bambou. Les calculs géométriques sont approchés avec $\pi = 3$!
  - Jiǔzhāng Suànshù 九章算术 (*Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*)
    -300 – 200, méthode du pivot de Gauss (décrite par Newton en 1670 et popularisée par Gauss en 1810)
    Manipulation de nombres négatifs (écrits en rouge ou barrés)
- Présentent des problèmes concrets ainsi que leur solution (sous forme algorithmique sur un exemple)

Commentaires et compilations

- Hǎidǎo Suànjīng 海岛算经 (*Le classique mathématique de l'île*) : écrit par Liu Hui (263), au départ un commentaire des *Neuf Chapitres*. Contient une approximation de $\pi \approx 3.1416$ obtenue avec une méthode d'interpolation et vérifiée un polygône à 3072 côtés. Utilise le calcul de l'aire d'un cercle.
- Zhāng Qiūjiàn Suànjīng 张邱建算经 (*Le classique mathématique de Zhang Qiujian*) : compilé entre 466 et 485. Contient le "problème des cent oiseaux" : un coq vaut 5 *qian*, une poule 3*qian* et trois poussins 1*qian*, comment acheter 100 oiseaux avec 100*qian* ?
- Sūnzǐ Suànjīng 孙子算经 (*Le classique mathématique de Maître Sun*) : écrit entre les III^{e} et V^{e} siècles. Contient des problèmes de calculs avec baguettes ainsi que le premier exemple du théorème des restes chinois (congruences).
- Jīgǔ Suànjīng 缉古算经 (*Continuation des anciennes mathématiques classiques*) : écrit par Wang Xiaotong (626), étudie la résolution générale (numérique) des équations cubiques.
- Zhuì Shù 缀述 (*Méthode d'interpolation*) : écrit par Zu Chongzhi, texte perdu.

Ces textes (et d'autres) sont rassemblés dans les *Dix Canons du calcul*, utilisés pour les examens impériaux (permettant de devenir un lettré).

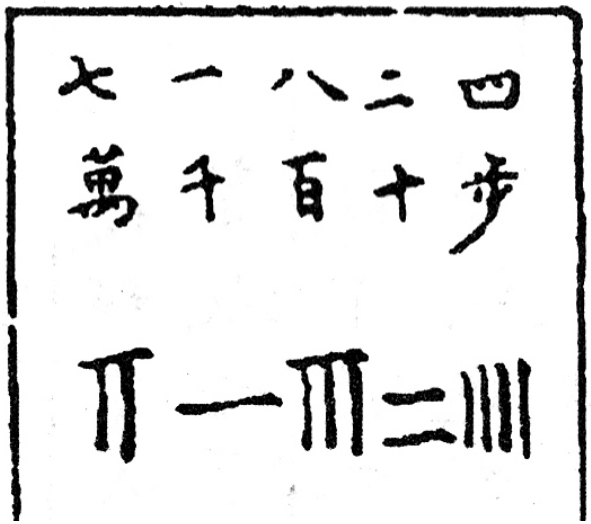
Zǔ Chōngzhī 祖冲之 (429–500)

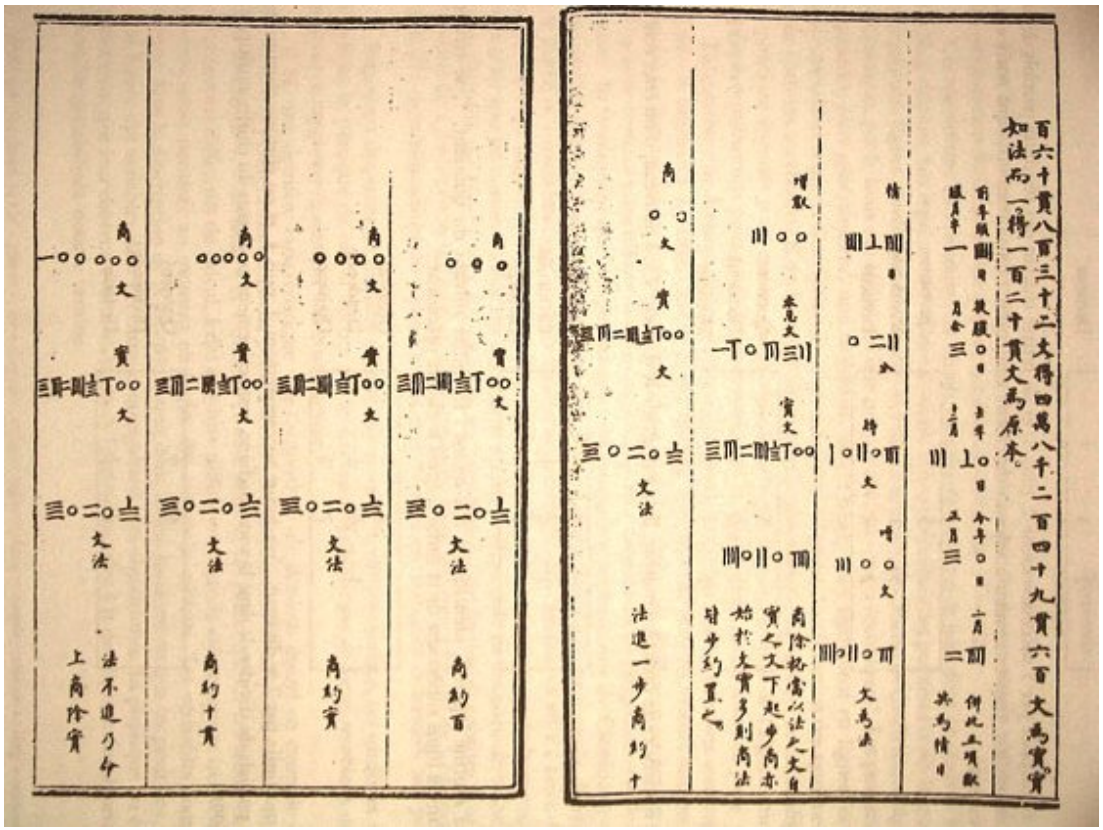
- Issu d'une famille de lettrés
- Astronome, améliore le calcul de la durée d'une année et les prédictions d'éclipses
- Ingénieur, invente un bateau avec des roues à aube
- Écrit le Zhui Shu avec son fils Zu Gengzhi, qui contient en particulier :
  - une approximation de π avec la méthode de Liu Hui :

    $$3,1415926 \leq \pi \leq 3,1415927$$

    et propose $\pi \approx \frac{355}{113}$. Cette approximation ne sera égalée que par les mathématiciens indiens du Kerala (XIV^{e}) et Adriaan Anthoniszoon (1585).
  - un calcul correct du volume de la sphère à l'aide du principe de Cavalieri (précurseur du calcul différentiel).

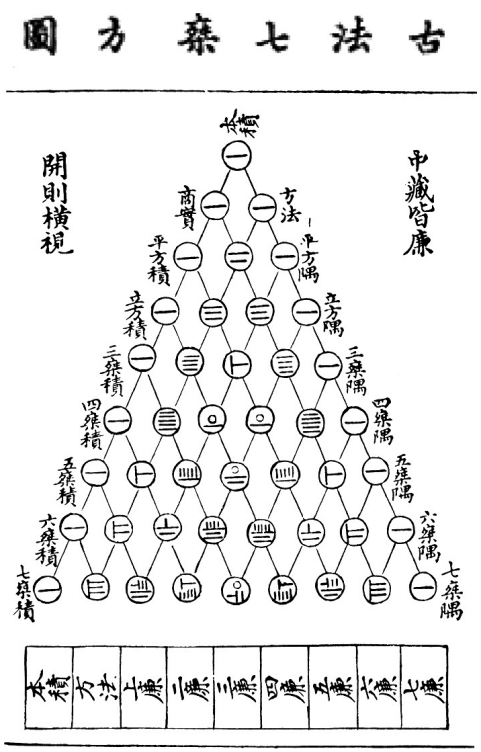
Méthode de calcul avec des baguettes





L'âge d'or des mathématiques chinoises

- Dynasties Song (960–1279) et Yuan (mongols, 1271–1368) encouragent les sciences
- Contacts avec la civilisation islamique qui peuvent expliquer des convergences (méthode de Horner) et indienne (notation du zéro)
- Lǐ Yě 李冶 (1192–1279) : invention d'une méthode de résolution algébrique de problèmes de géométrie : tiānyuán shù 天元术 (technique de l'inconnue céleste)
- Yáng Huī 杨辉 (1238–1298) : formule du binôme, triangle de Pascal



- Zhū Shìjié 朱世杰 (1249–1314) : *Miroir de Jade des Quatre Inconnues* 四元玉鉴, qui résout des équations polynômiales à quatre inconnues, qui se ramènent à des équations polynômiales à une inconnue jusqu'à l'ordre 14.
- Guō Shǒujìng 郭守敬 (1231–1316) : ingénieur hydrologue et astronome, travaille sur la trigonométrie sphérique

Le déclin des mathématiques chinoises

- Sous la dynastie Ming (1368–1644), défiance envers les sciences "étrangères" : rejet des mathématiques favorisées par la dynastie mongole Yuan et retour aux sciences "chinoises" (botanique et pharmacologie).
- Les mathématiciens étaient des lettrés, connaissaient peu de mathématiques et les développements récents devenaient incompréhensibles sans explications.
- Rencontre avec les mathématiques occidentales par l'intermédiaire des jésuites : choc de conceptions du monde
- Citation du *Siku quanshu zongmu tiyao* (Catalogue annoté complet de la bibliothèque impériale, 1798) :

欧罗巴人自 密 其 学, 立说深隐不可解. [...] 算法新书往往有 引之,读者未之能 详.

"Les Européens ont délibérément tout embrouillé, de telle sorte que leurs théories sont devenues obscures et incompréhensibles. [...] Les nouveaux livres de calcul contiennent souvent de nombreuses références telles qu'il est impossible pour le lecteur de comprendre."

Comparaison des mathématiques chinoises et occidentales

- Pas de formalisation par axiomes, définitions, théorèmes, démonstrations : le modèle chinois consiste en l'exposé d'un problème, sa réponse suivie de la méthode de résolution.
- Cela ne signifie pas qu'il n'existe pas de "preuve" dans les mathématiques chinoises.
- La méthode axiomatique déductive d'Euclide repose sur la répétition de phrases syntaxiquement proches, mais qui apportent une étape cruciale dans le raisonnement. Cela est à l'opposé des pratiques chinoises qui valorisent la concision de l'énoncé.
- Conceptions philosophiques opposées : abstraction valorisée en Occident (influence platonicienne) alors que les applications sont indispensables en Chine (influence confucéenne).
- Absence de contraintes philosophiques ou théologiques en Chine

Outline

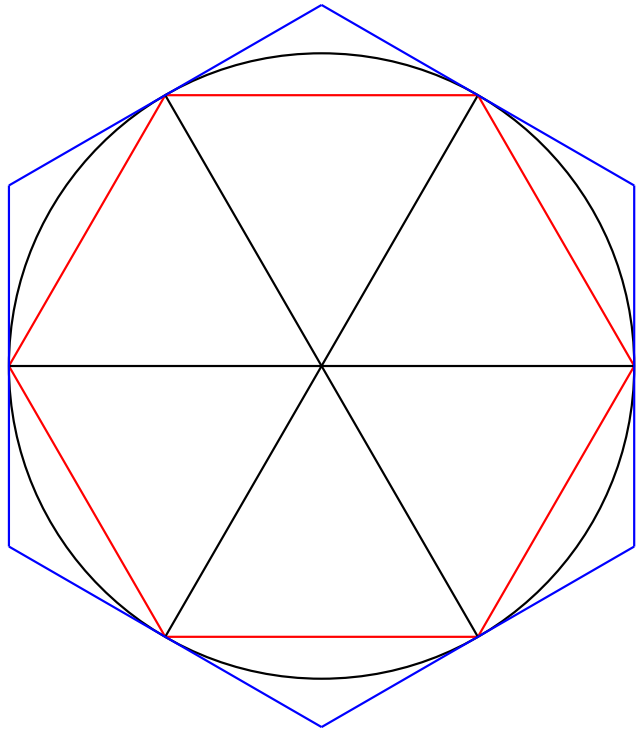
1 Les trois grands problèmes de l'Antiquité

2 Mathématiques chinoises : des algorithmes efficaces

3 Naissance et formalisation de l'analyse

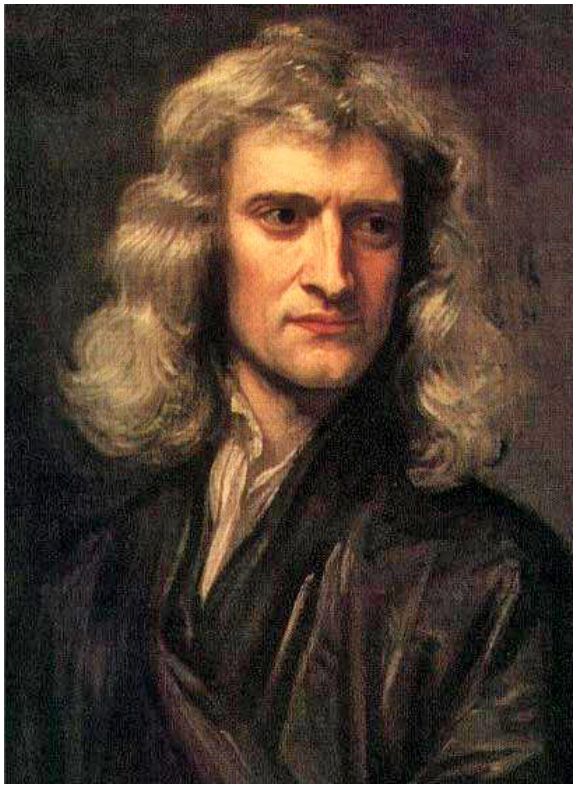
Premières tentatives de calcul infinitésimal

- Archimède (-287 – -212)
  - *Méthode des théorèmes mécaniques* retrouvée en 1906 par Helberg
  - Utilisation de la méthode d'exhaustion (Eudoxe de Cnide, -408 – -355) pour $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ (polygônes à 96 côtés)
  - Calcul de l'aire de la parabole
  - Calcul du volume de la sphère et du cylindre (gravés sur sa tombe)



- Impossibilité de l'infini en acte (Aristote)
- Contrainte philosophique levée au cours du Moyen-Âge
- Méthode des indivisibles de Cavalieri (1620), Fermat (adégalisation, 1636), Huygens (1667)
- École du Kerala (XIV^{e})

Isaac Newton (1643–1727)



- Grande peste de Londres (1665–1666) : *Annus mirabilis*
- Influence de Descartes, Galilée, Fermat, Isaac Barrow
- Controverses avec Hooke et Leibniz
- Travaux en optique (*Opticks*, 1675, publié en 1704), gravitation (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* 1687), calcul différentiel et intégral (*Arithmetica universalis* 1707)
- Professeur à Cambridge (1669–1696), directeur de la Maison de la Monnaie (1700–1727), membre du Parlement (1689, 1701), Président de la Royal Society (1703–1727)
- Également alchimiste et théologien

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

- Fait des études de philosophie puis de droit, très peu de mathématiques
- Séjour diplomatique à Paris (1672–1676) : étude des mathématiques et de la physique avec Huygens
- Fonde à Leipzig le journal *Acta Eruditorum* (1682) à l'imitation du *Journal des Savants* et des *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1665)
- Publication de sa *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, et singulare pro illis calculi genus* (1684)
- Bibliothécaire puis conseiller privé de la maison de Hanovre jusqu'à sa mort
- Également philosophe (théorie des monades)

Controverse Newton–Leibniz

- Différences de notations :
  - Calcul de fluxions (Newton) : si x dépend du temps, $\dot{x}$ est sa fluxion
  - Notation de Leibniz : introduit le terme "fonction" $y = f(x)$ (1692), différentielle $\frac{dy}{dx}$, intégrale $\int f(t)dt$
- Différence de dérivation :
  - Pour Newton, vient de la formule du binôme, pour $y = x^n$:

$$(x + \dot{x}t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (\dot{x}t)^k \approx x^n + nx^{n-1}\dot{x}t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}.$$

  - Pour Leibniz, vient de la remarque élémentaire sur la somme des différences (intégration discrète) :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_0.$$

- Même critique : pourquoi négliger les termes d'ordre supérieur s'ils ne sont pas nuls ? Et s'ils sont nuls, comment peut-on diviser par zéro ?
- S'impose par l'efficacité des résultats (problème de la brachistochrone, Jean Bernouilli, 1696)

Leonhard Euler (1707–1783)

- Remporte douze fois le concours de l'Académie des sciences de Paris
- Professeur à l'Académie des sciences de Russie (1727–1740 et 1766–1783) et à l'Académie de Berlin (1740–1766)
- *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755), *Institutiones calculi integralis* (1768-1770)
- Développements limités qui mènent à des séries : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- Fonction zêta et ses liens avec les nombres premiers :

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Manipulation de séries divergentes

Mémoire de l'académie des sciences de Berlin 17, 1768, pp. 83–106

2. Pour les ſéries de la premiere eſpece, puisque leurs termes deviennent de plus en plus grands, il eſt bien vrai qu'on ne ſauroit ſe former une juſte idée de leur ſomme, tandisqu'on entend par ſomme une telle valeur, de laquelle on approche d'autant plus, plus on raſſemble de termes de la ſérie actuellement. Ainſi, quand on dit que la ſomme de cette ſérie $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ &c. eſt $\frac{1}{4}$, cela doit paroitre bien paradoxe, puisqu'en raſſemblant 100 termes de cette ſérie, on trouve -50: or la ſomme de 101 termes donne $+51$, leſquelles valeurs ſont bien différentes de $\frac{1}{4}$, & le deviennent encore beaucoup plus, quand on multiplie le nombre des termes. Mais j'ai déjà remarqué dans une autre occaſion, qu'il faut donner au mot de *ſomme* une ſignification plus étendue, & entendre par là une fraction, ou autre expreſſion analytique, laquelle étant développée ſelon les principes de l'analyſe produiſe la même ſérie dont on cherche la ſomme. Après avoir établi cette ſignification, il n'eſt plus douteux que la ſomme de cette ſérie $1 - 2 + 3 - 4 +$ &c. ſoit $= \frac{1}{4}$, puiſqu'elle nait de l'évolution de cette formule $\frac{1}{(1+1)^2}$, dont la valeur eſt inconteſtablement $\frac{1}{4}$. La choſe deviendra plus claire en conſidérant cette ſérie plus générale:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \text{&c.}$$

qui réſulte en développant cette formule $\frac{1}{(1+x)^2}$, à laquelle donc cette ſérie eſt effectivement égale, & partant auſſi dans le cas où $x = 1$.

La formalisation de l'analyse

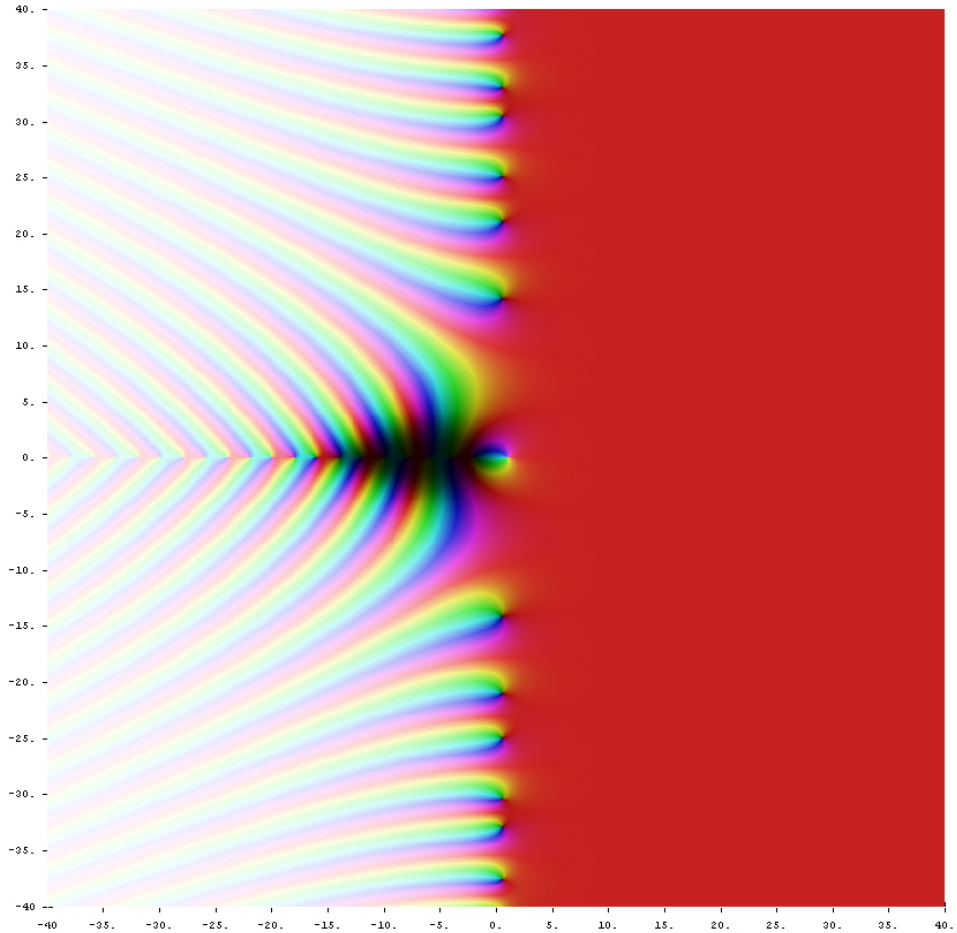
- Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques* (1797) : développements de Taylor
- Cauchy, *Cours d'Analyse* (1821) : notion de limite, insistance sur la rigueur. "Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres." Critiques de l'École Polytechnique, ainsi que de Niels Abel (1826) :

> **Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (page 131) le théorème suivant: "Lors-"que les différens termes de la série, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ etc. sont des fonctions d'une "même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une va-"leur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est "aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série,**
>
> $$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots \text{ etc.}$$
>
> **est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, où m est un nombre entier.. Il y a, comme on sait, plusieurs séries de cette espèce.**

- Bolzano (1817) et Weierstrass (1815–1897) : la fin de l'histoire
- Influence de la crise du cinquième postulat d'Euclide : géométries non-euclidiennes (Gauss, Lobatchevski 1829, Bolyai 1832)

Les développements ultérieurs

- Théorie analytique des nombres (Dirichlet, 1837)
- Hypothèse de Riemann (1859)



Conclusion

- Contraintes (auto-imposées) fécondes pour la réflexion mathématique
  - Permettent la généralisation et l'abstraction
  - Vérité indépendante d'une confrontation à l'expérience
- Conditions de l'épanouissement des connaissances :
  - Partage large des connaissances (journaux, universités)
  - Indépendance des chercheurs
  - Pas d'impératif d'applications immédiates
- Échanges entre différents domaines, décloisonnement