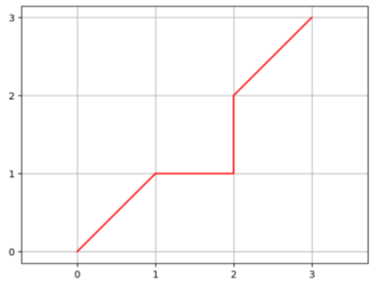
Olympiades : les nombres de Delannoy

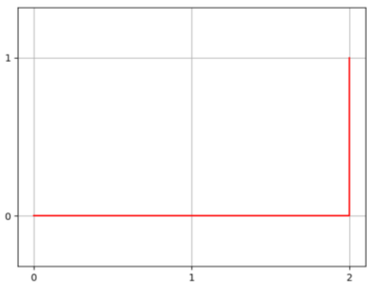
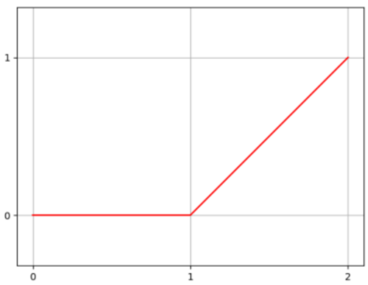
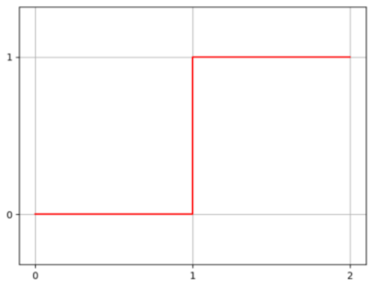
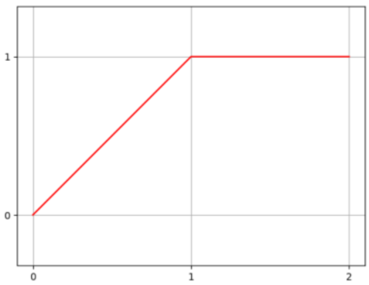
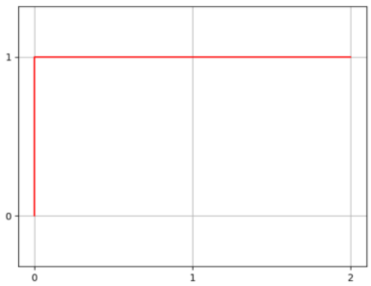
Correction

1)



Les coordonnées du point d'arrivée sont $(3; 3)$.

2)

Il y a donc 5 chemins de Delannoy admettant comme point d'arrivée le point de coordonnées $(2; 1)$.

3)

a) Pour obtenir un chemin de Delannoy admettant comme point d'arrivée de coordonnées $(m, 0)$, il ne faut que se déplacer horizontalement, le seul chemin possible est composé des m translations associées au nombre 0.
On en déduit $D(m, 0) = 1$.

b) Si on considère un chemin de Delannoy qui admet le point d'arrivée de coordonnées $(n; m)$, alors il suffit d'intervertir les translations codées par 0 et 2 pour obtenir un chemin de Delannoy admettant le point d'arrivée de coordonnées $(m, ; n)$. On peut appliquer la même procédure pour transformer un chemin de Delannoy admettant le point d'arrivée de coordonnées $(m; n)$ en un chemin qui admet le point d'arrivée de coordonnées $(n; m)$.
On a donc $D(m, n) = D(n, m)$.

c) On considère un chemin reliant l'origine au point de coordonnées $(1010; 1)$.
Un tel chemin nécessite :

- soit une seule translation de vecteur de coordonnées $\binom{0}{1}$ et 1010 translations de vecteurs de coordonnées $\binom{1}{0}$, il existe 1011 tels chemins suivant la position du nombre 2 dans les listes représentant ces chemins : $(2, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 2, 0, 0, \dots, 0)$, …, $(0, 0, \dots, 0, 2)$;
- soit une seule translation de vecteur de coordonnées $\binom{1}{1}$ et 1009 translations de vecteurs de coordonnées $\binom{1}{0}$, il existe 1010 tels chemins suivant la position du nombre 1 dans les listes représentant ces chemins : $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$, …, $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

On a donc $D(1010,1) = 1011 + 1010 = 2021$.

4)

a)

(Analyse)

On suppose qu'il existe un chemin de Delannoy admettant le point $M(1;1)$ comme point d'arrivé représenté par la liste $(a_1, \ldots, a_p)$, on raisonne par disjonction des cas en considérant les trois valeurs que peut avoir a_1 :

- Soit $a_1 = 0$, alors pour atteindre A, on a nécessairement $a_2 = 2$ et $p = 2$. On obtient la liste $(0{,}2)$.
- Soit $a_1 = 1$, alors pour atteindre A, on a nécessairement $p = 1$ (on est déjà arrivé !). On obtient la liste (1).
- Soit $a_1 = 2$, alors pour atteindre A, on a nécessairement $a_2 = 0$ et $p = 2$. On obtient la liste $(2{,}0)$.

(Synthèse)

Les trois chemins représentés par les listes $(0{,}2)$, (1) et $(2{,}0)$ admettent bien le point $M(1;1)$ comme point d'arrivée.

(Conclusion)

$$D(1{,}1) = 3$$

b)

Soit un chemin de Delannoy $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ admettant le point d'arrivée de coordonnées $(m;n)$. On raisonne par disjonction des cas en considérant les trois valeurs possibles de a_p :

- Soit $a_p = 0$, dans ce cas là le chemin $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est un chemin de Delannoy qui admet le point de coordonnées $(m-1;n)$ comme point d'arrivé, il en existe donc $D(m-1,n)$;
- Soit $a_p = 1$, dans ce cas là le chemin $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est un chemin de Delannoy qui admet le point de coordonnées $(m-1;n-1)$ comme point d'arrivé, il en existe donc $D(m-1,n-1)$;
- Soit $a_p = 2$, dans ce cas là le chemin $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est un chemin de Delannoy qui admet le point de coordonnées $(m;n-1)$ comme point d'arrivé, il en existe donc $D(m,n-1)$.

On en déduit finalement la relation :

$$D(m,n) = D(m-1,n) + D(m-1,n-1) + D(m,n-1)$$

c)

m\n	0	1	2	3	4
0	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	3	**5**	**7**	**9**
2	**1**	**5**	**13**	**25**	**41**
3	**1**	**7**	**25**	**63**	**129**
4	**1**	**9**	**41**	**129**	**321**

5)

a) On a $N = 3(a_2 + a_3 \times 3 + \cdots + a_p \times 3^{p-2}) + a_1$ où $0 \leq a_1 < 3$.

On en déduit que le reste dans la division euclidienne de N par 3 est a_1.

b) Le quotient q dans la division euclidienne de N par 3 est :

$$q = a_2 + a_3 \times 3 + \cdots + a_p \times 3^{p-2}$$

$q = 3(a_3 + \cdots + a_p \times 3^{p-3}) + a_2$ où $0 \leq a_2 < 3$

Le reste dans la division euclidienne de q par 3 est a_2.

6) $N = 2 + 0 \times 3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^3$

Au chemin $(2, 0, 2, 1)$, on associe le nombre $N = 47$.

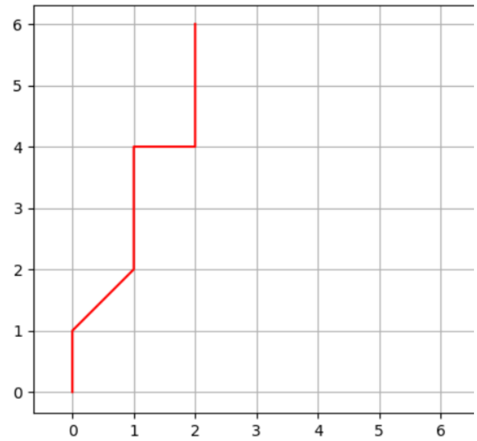
7)

a) On applique le procédé présenté à la question 5 que l'on réitère afin d'obtenir de proche en proche $a_1, a_2, a_3, \ldots$

```
2021 = 3 * 673 + 2
673 = 3 * 224 + 1
224 = 3 * 74 + 2
74 = 3 * 24 + 2
24 = 3 * 8 + 0
8 = 3 * 2 + 2
2 = 3 * 0 + 2
```

Le chemin qui est donc associé à 2021 est $(2, 1, 2, 2, 0, 2, 2)$

b)



On en déduit que ce chemin de Delannoy admet comme point d'arrivée le point de coordonnées $(2; 6)$.
c)
On étend le tableau proposé à la question 4.c) :

m\n	0	1	2
0	1	1	**1**
1	1	3	**5**
2	**1**	**5**	**13**
3	**1**	**7**	**25**
4	**1**	**9**	**41**
5	**1**	**11**	**61**
6	**1**	**13**	**85**

On en déduit finalement $D(2,6) = 85$.
Ainsi on a 85 chemins de Delannoy admettant A comme point d'arrivée.

Complément (l'exercice résolu en langage Python)

```
from matplotlib.pyplot import *

def trace_chemin(L): # trace un chemin de Delannoy à partir de la liste L donnée
en chaîne de caractères
    x = 0
    y = 0
    Lx = [0]
    Ly = [0]
    for t in L:
        if t == "0":
            x = x + 1
        elif t == "1":
            x = x + 1
            y = y + 1
        elif t == "2":
            y = y + 1
        else:
            return False
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    plot(Lx,Ly,"r-")
    grid()
    xticks(list(range(0, max(x,y)+1)))
    yticks(list(range(0, max(x,y)+1)))
    xlim([-0.5, max(x,y) + 0.5])
    ylim([-0.5, max(x,y) + 0.5])
    axis('equal')
    show()

# exemple : trace_chemin("0021")
```

```python
def arrivee(L): # à partir d'un chemin renvoie les coordonnées du point d'arrivée
    x = 0
    y = 0
    for t in L:
        if t == "0":
            x = x + 1
        elif t == "1":
            x = x + 1
            y = y + 1
        elif t == "2":
            y = y + 1
        else:
            return False
    return x, y

# exemple : arrivee("0021")

def D(m, n): # calcule D(m, n)
    L = [[1]*(n+1) for i in range(m+1)]
    for i in range(1,m+1):
        for j in range(1, n+1):
            L[i][j] = L[i-1][j]+L[i-1][j-1]+L[i][j-1]
    return L[m][n]

# exemple : D(2, 6)

def calcul():
    D = [[1]*5 for i in range(5)]
    for m in range(1,5):
        for n in range(1, 5):
            D[m][n] = D[m-1][n] + D[m-1][n-1] + D[m][n-1]
    return D

def nombre(L): # à partir d'un chemin, calcule le nombre associé N
    N = 0
    i = 1
    for t in L:
        N = N + i * int(t)
        i = i * 3
    return N

# exemple : nombre("0021")

def chemin(N): # à partir d'un nombre, renvoie le chemin associé
    L = ""
    while N>0:
        L += str(N%3)
        N = N // 3
    return L

# exemple : chemin(2021)
```

Exemples d'interaction :

```
>>> arrivee("0021")
(3, 2)
>>> D(2,6)
85
>>> nombre("2021")
47
>>> chemin(2021)
'2122022'
```

Exercice 2 : 2021 en équations

1. Déterminer les deux nombres entiers naturels u et v autres que 1 et 2021 tels que $u \times v = 2021$ et $u < v$.

   La décomposition en produit de facteurs premiers de 2021 est $2021 = 43 \times 47$.
   Ainsi, $u = 43$ et $v = 47$.

2. Déterminer tous les nombres entiers positifs a tels que $a^2 + 2021$ soit le carré d'un entier positif.

   Si a^2+2021 est le carré d'un entier positif, alors il existe un entier naturel b tel que $a^2+2021 = b^2$. Par conséquent, $2021 = b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$. On en déduit que $b-a$ et $b+a$ sont deux diviseurs de 2021. D'après la question précédente, on distingue deux cas :

   - Cas 1 : $b - a = 43$ et $b + a = 47$
     On trouve $a = 2$ et $b = 45$. On a bien $a^2 + 2021 = 2^2 + 2021 = 2025 = 45^2 = b^2$.
   - Cas 2 : $b - a = 1$ et $b + a = 2021$
     On trouve $a = 1010$ et $b = 1011$. On a bien $a^2+2021 = 1010^2+2021 = 1022121 = 1011^2 = b^2$.

   Ainsi, il existe deux entiers positifs a tels que a^2+2021 soit le carré d'un entier positif : 2 et 1010.

3. Le but de cette question est de chercher, s'ils existent, des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif. Cela revient à déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $a^3 + 2021 = b^3$.

   (a) Pour tous nombres entiers naturels a et b, démontrer que $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$.

   Pour tous nombres entiers naturels a et b :

   $$(b - a)(b^2 + ab + a^2) = b^3 + ab^2 + a^2b - ab^2 - a^2b - a^3 = b^3 - a^3$$

   (b) On pose $b - a = u$ et $b^2 + ab + a^2 = v$ où u et v sont les entiers trouvés à la question 1. Montrer que $3a^2 + 129a + 1802 = 0$.

   En posant $b - a = 43$ et $b^2 + ab + a^2 = 47$, on a alors :

   - $b = a + 43$
   - $b^2 + ab + a^2 = (a + 43)^2 + a(a + 43) + a^2 = a^2 + 86a + 1849 + a^2 + 43a + a^2 = 3a^2 + 129a + 1849 = 47 \Leftrightarrow 3a^2 + 129a + 1802 = 0$

   (c) On pose $b - a = 1$ et $b^2 + ab + a^2 = 2021$. Montrer que a vérifie une équation du second degré que l'on précisera.

   Si a^3+2021 est le cube d'un entier positif, alors il existe un entier naturel b tel que $a^3+2021 = b^3$. Par conséquent, $2021 = b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$. On en déduit que $b-a$ et b^2+ab+a^2 sont deux diviseurs de 2021. En posant $b - a = 1$ et $b^2 + ab + a^2 = 2021$, on a alors :

   - $b = a + 1$
   - $b^2 + ab + a^2 = (a + 1)^2 + a(a + 1) + a^2 = a^2 + 2a + 1 + a^2 + a + a^2 = 3a^2 + 3a + 1 = 2021$

   (d) Grâce aux relations obtenues aux questions 3(b) et 3(c), existe-t-il des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif ?

   Les solutions des deux équations du second degré $3a^2+129a+1802 = 0$ et $3a^2+3a+1 = 2021$ ne sont pas des nombres entiers. Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel a tel que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif.

4. Le but de cette question est de chercher les entiers naturels a tels que $a^4 + 2021$ soit la puissance quatrième d'un entier positif. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer, s'ils existent, les entiers naturels a qui vérifient cette condition.

   Si $a^4 + 2021$ est la quatrième puissance d'un entier positif, alors il existe un entier naturel b tel que $a^4 + 2021 = b^4$. Par conséquent, $2021 = b^4 - a^4 = (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = (B - A)(B + A)$ avec $B = b^2$ et $A = a^2$.

   D'après la question 2, on en déduit que $A = 2$ ou $A = 1010$. Comme 2 et 1010 ne sont pas des carrés parfaits, on en déduit qu'il n'existe pas d'entier naturel a tels que $a^4 + 2021$ soit la quatrième puissance d'un entier positif.